Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Tema A
29 Novembre 2013

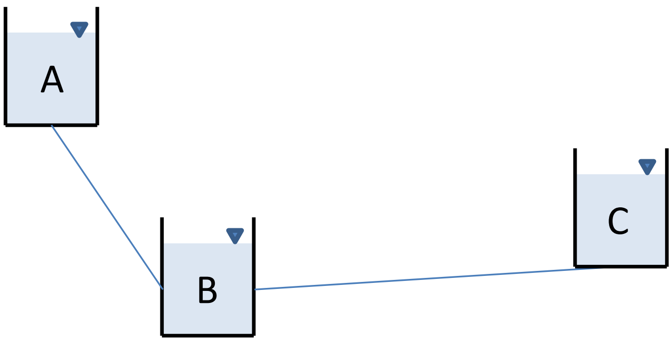
Esercizio 1 – Riempimento di un serbatoio

Si deve alimentare il serbatoio B, posto a quota Y_B, con una portata di 0.098 m^3/s. A tale fine si utilizza un serbatoio A, già presente, posto a quota Y_A. Se la portata così ottenuta non fosse sufficiente, occorrerebbe predisporre una condotta che colleghi il serbatoio C, posto a quota Y_C, al serbatoio B.

Si determini:
- se la portata Q proveniente dal serbatoio A è sufficiente;
- il diametro D_n da assegnare alla nuova tubazione.

Dati

ν	$1.006 \cdot 10^{-6}$	m^2/s
Y_A	218	m
Y_B	160	m
Y_C	180	m
D_{AB}	195	mm
L_{AB}	2140	m
L_{BC}	4525	m
scabrezza AB	0.2	mm
scabrezza BC	0.08	mm



Si utilizzi per i calcoli del fattore di attrito la formula per moto completamente turbolento, verificandola a posteriori. Per rendere più veloci i calcoli iterativi, nel calcolo del diametro della condotta BC si assuma un fattore di attrito di primo tentativo pari a 0.004.

Soluzione

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log_{10}\left(\frac{1}{3.71}\frac{\varepsilon_s}{D}\right) \quad \Rightarrow \quad f = 0.004934$$

$$J_{AB} = \frac{Y_A - Y_B}{L_{AB}} = 0.0271$$

$$v_{AB} = \sqrt{\frac{J_{AB} g D_{AB}}{2f}} = 2.29\,\text{m/s}$$

$$Q_{AB} = v_{AB}\frac{\pi D_{AB}^2}{4} = 0.068\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$\text{Re}_{AB} = \frac{v_{AB} D_{AB}}{\nu} = 444287\ \text{(confermata bontà assunzione)}$$

$$Q_{BC} = Q - Q_{AB} = 0.03\,\text{m}^3/\text{s}$$

$$J_{BC} = \frac{Y_C - Y_B}{L_{BC}} = 0.0044$$

$f^{(1)}$=0.004

$$D_{BC}^{(1)} = \frac{\varepsilon_s}{3.71 \times 10^{\frac{-1}{4\sqrt{f^{(1)}}}}} = 0.193\,\text{m}$$

$$v_{BC}^{(1)} = \frac{4Q_{BC}}{\pi D_{BC}^2} = 1.0235$$

$$f^{(2)} = \frac{J_{BC}\, g D_{BC}}{2 v_{BC}^2} = 0.003998$$

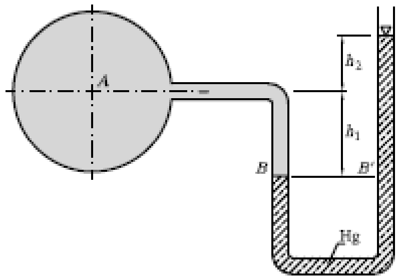
$$D_{BC}^{(2)} = \frac{\varepsilon_s}{3.71 \times 10^{\frac{-1}{4\sqrt{f^{(2)}}}}} = 0.1935\,\text{m}$$ Risultato a convergenza

$$\text{Re}_{BC} = \frac{v_{BC} D_{BC}}{\nu} = 196170$$ accettabile

Esercizio 2 – Pressione in una tubazione

Dell'acqua scorre in una tubazione. Si vuole determinare il valore della pressione riferito all'asse della tubazione, attraverso un piezometro a mercurio.

Se la pressione nella tubazione viene ridotta di 0.5 bar, qual è il nuovo dislivello di mercurio tra i due rami del piezometro?



Dati:

γ_{Hg} = 133000 N/m3

h_1 = 40 cm

h_2 = 20 cm

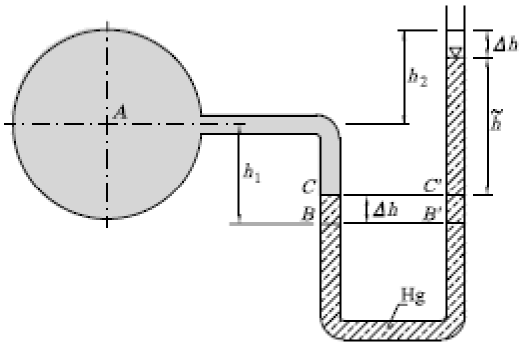
Soluzione

$p_B = p_{B'}$

$p_B = p_A + \gamma_{H_2O} h_1$

$p_{B'} = p_a + \gamma_{Hg} \left(h_1 + h_2 \right)$

⇨ $p_A + \gamma_{H_2O} h_1 = p_a + \gamma_{Hg} \left(h_1 + h_2 \right)$ ⇨ $p_A = p_a + \gamma_{Hg} \left(h_1 + h_2 \right) + \gamma_{H_2O} h_1 = 1.75 \text{ bar}$



$p_C = p_{C'}$

$p_C = p_A - \Delta p + \gamma_{H_2O} \left(h_1 - \Delta h \right)$

$p_{C'} = p_a + \gamma_{Hg} \left(h_1 + h_2 - 2\Delta h \right)$

⇨ $p_A - \Delta p + \gamma_{H_2O} \left(h_1 - \Delta h \right) = p_a + \gamma_{Hg} \left(h_1 + h_2 - 2\Delta h \right)$

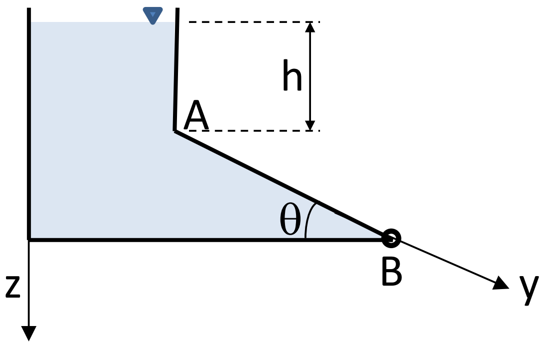
⇨ $$\Delta h = \frac{p_a + \gamma_{Hg} \left(h_1 + h_2 \right) - \left(p_A - \Delta p \right) - \gamma_{H_2O} h_1}{2\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O}} = 19.5 \text{ cm}$$

$h_{new} = h_1 + h_2 - 2\Delta h = 21 \text{ cm}$

Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Tema B
29 Novembre 2013

Esercizio 1 – Paratoia

Il cassone riportato in figura contiene acqua. Determinare il valore minimo di z per cui la paratoia rettangolare AB, incernierata in B e profondità l non si muove.



Dati:
l = 2 m
AB = 1 m
θ = 30°
P (peso paratoia) = 25000 N

Soluzione

G posizione del baricentro della paratoia.

- Momento dovuto alla forza peso (Mp): $M_P = P \times GB \times \cos\theta = 10825 \text{ Nm}$
- Coordinate di punti di interesse (cerniera e baricentro)

  $y_B = \frac{h}{\sin\theta} + \overline{AB} \qquad z_G = h + \frac{\overline{AB}}{2}\sin\theta \qquad y_G = \frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2}$
- Area della paratoia

  $A = \overline{AB} \times l = 2$
- Momento di Inerzia baricentrico:

  $I_G = \frac{1}{12}\overline{AB}^3 \times l = 0.167$
- Spinta sulla paratoia

  $S = \gamma A z_G = \gamma A\left(h + \frac{\overline{AB}}{2}\sin\theta\right)$
- Coordinata centro di spinta:

  $y_C = y_G + \frac{I_G}{y_G A} = \frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{I_G}{\left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2}\right)A}$
- Braccio (b_S) della spinta rispetto alla cerniera

$$b_S = y_B - y_C = \frac{h}{\sin\theta} + \overline{AB} - \left[\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{I_G}{\left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} \right) A} \right] = 0.5\overline{AB} - \frac{I_G}{\left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} \right) A}$$

- Il momento dovuto al peso deve essere uguale al momento dovuto alla spinta:

$$S \times b_S = \gamma A \left(h + \frac{\overline{AB}}{2} \sin\theta \right) \times \left[0.5\overline{AB} - \frac{I_G}{\left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} \right) A} \right] = M_P$$

$$\gamma A \left(h + \frac{\overline{AB}}{2} \sin\theta \right) \times \left[\frac{0.5\overline{AB} \left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} \right) A - I_G}{\left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} \right) A} \right] = M_P$$

Poniamo

$$\alpha = 0.5\overline{AB}A$$

$$\left(\gamma h + \gamma \frac{\overline{AB}}{2} \sin\theta \right) \left(\alpha \frac{h}{\sin\theta} + \alpha \frac{\overline{AB}}{2} - I_G \right) = M_P \left(\frac{h}{\sin\theta} + \frac{\overline{AB}}{2} \right)$$

Siano:

$$\beta = \alpha \frac{\overline{AB}}{2} - I_G \qquad \delta = \gamma \frac{\overline{AB}}{2} \sin\theta$$

Si può scrivere:

$$(\gamma h + \delta) \left(\alpha \frac{h}{\sin\theta} + \beta \right) = M_P \frac{h}{\sin\theta} + M_P \frac{\overline{AB}}{2}$$

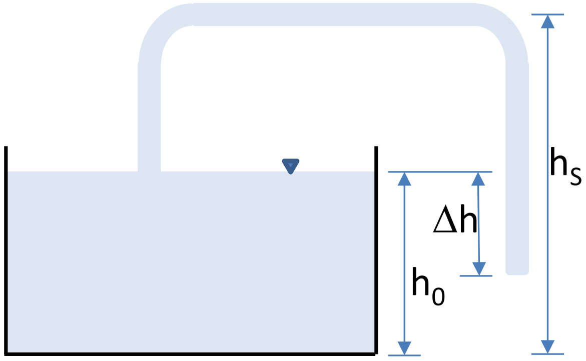
$$\frac{\gamma\alpha}{\sin\theta} h^2 + \gamma\beta h + \frac{\alpha\delta}{\sin\theta} h + \delta\beta = M_P \frac{h}{\sin\theta} + M_P \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\frac{\gamma\alpha}{\sin\theta} h^2 + h \left(\gamma\beta + \frac{\alpha\delta}{\sin\theta} - \frac{M_P}{\sin\theta} \right) + \delta\beta - M_P \frac{\overline{AB}}{2} = 0$$

La soluzione dell'equazione quadratica qui riportata ci dà due soluzioni di cui una sola accettabile, perché l'altra è negativa:

h = 94 cm

Esercizio 2 – Sifone



Da un serbatoio contenente acqua esce un sifone, di diametro pari a 20 cm, che scarica in atmosfera. Occorre determinare il valore massimo della distanza tra l'efflusso e il pelo libero del serbatoio (Δh) e della portata massima affinché non si abbia formazione di vapore in nessun punto della condotta. Si ha formazione di vapore se la pressione in qualche punto scende al di sotto della tensione di vapore dell'acqua, che alla temperatura del sistema è pari a 2350 Pa. Si trascurino le perdite di carico.

Nel caso che il dislivello Δh superi il valore massimo, assumendo un valore pari a quello massimo aumentato del 50%, aumentando la velocità di efflusso si incorrerebbe nel fenomeno della cavitazione. Per evitare ciò occorre ridurre il foro di uscita, rastremando l'ugello, in modo da non modificare la portata precedentemente valutata. Si chiede in questo caso di determinare questo diametro di sbocco.

Dati:
h0 = 30 m
hS = 36 m

Soluzione

Il punto in cui la pressione è minima è quello del tratto superiore orizzontale. Se applichiamo il teorema di Bernoulli tra il pelo libero e il tratto orizzontale della condotta:

$$\frac{P_a}{\gamma} + h_0 = \frac{P_S^{\min}}{\gamma} + h_S + \frac{v_S^2}{2g}$$

Da cui

$$v_S = \sqrt{2g\left(\frac{P_a - P_S^{\min}}{\gamma} + h_0 - h_S\right)} = 17.7 \text{ m/s}$$

Da cui la portata:

$$\dot{V} = v_S \frac{\pi d^2}{4} = 0.56 \quad \text{m}^3\text{/s}$$

E il valore di Δh si ricava dal teorema di Bernoulli tra pelo libero e sbocco:

$$h_0 = h_1 + \frac{v_S^2}{2g} \Rightarrow \Delta h = h_0 - h_1 = \frac{v_S^2}{2g} = 16 \text{ m}$$

Se Δh è aumentato del 50%, il nuovo valore diviene

$$\Delta h_{\text{mod}} = 1.5\Delta h = 24 \text{ m}$$

Riapplicando Bernoulli tra pelo libero e sbocco, si può ottenere la nuova velocità di efflusso:

$$\Delta h_{\mathrm{mod}} = \frac{v_e^2}{2g} \Rightarrow v_e = \sqrt{2g\Delta h_{\mathrm{mod}}} = 22 \text{ m/s}$$

Poiché non si vuole modificare la portata $\dot{V}$, e essendo

$$\dot{V} = A_S v_S = A_e v_e$$

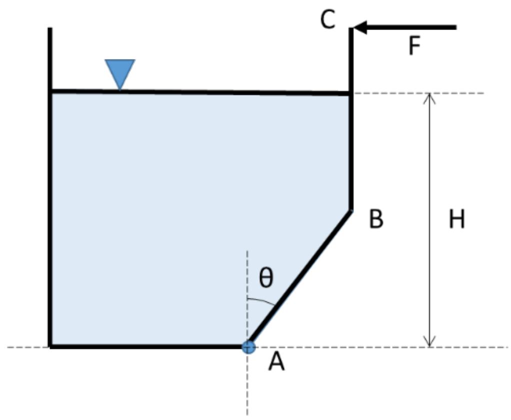
Si ha che

$$A_e = \frac{\dot{V}}{v_e} \Rightarrow d_e = \sqrt{\frac{4\dot{V}}{\pi v_e}} = 0.18 \quad \text{m}$$

Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Tema C
29 Novembre 2013

Esercizio 1 – Paratoia

Il cassone prismatico riportato in figura contiene acqua. Determinare il valore della forza F (applicata nel punto C e diretta orizzontalmente) per cui la paratoia ABC, incernierata in A e profondità l, non si muove.



Dati:
l = 2 m
AB = 1 m
BC = 1 m
H = 1.50 m
θ = 30°
P (peso complessivo paratoia ABC) = 25000 N

Soluzione

Il bilancio di forze da imporre è il seguente:

$$S_{AB}b_{AB}+S_{BC}b_{BC}+\frac{P}{2}\frac{L}{2}\sin\theta+\frac{P}{2}L\sin\theta=FL\left(1+\cos\theta\right) \tag{1}$$

Dove tutte le forze sono espresse per unità di lunghezza. Con bAB e bBC si indicano i bracci delle due spinte SAB e SBC che agiscono rispettivamente sul tratto AB e BC, aventi uguale lunghezza, indicata più semplicemente con L.
La forza richiesta è quindi data da:

$$F=\frac{\frac{S_{AB}b_{AB}}{L}+\frac{S_{BC}b_{BC}}{L}+\frac{3P}{4}\sin\theta}{1+\cos\theta} \tag{2}$$

A questo punto basta quindi calcolare le due spinte e i due bracci:

$$S_{AB}=\gamma L\left(H-\frac{L}{2}\cos\theta\right) \tag{3}$$

$$S_{BC}=\gamma\frac{\left(H-L\cos\theta\right)^2}{2} \tag{4}$$

$$b_{AB} = \frac{L}{2} - \frac{L^2 \cos\theta}{6\left(2H - L\cos\theta\right)} \tag{5}$$

$$b_{BC} = \frac{H + 2L\cos\theta}{3} \tag{6}$$

Esercizio 2 – Tubazione di collegamento tra serbatoi

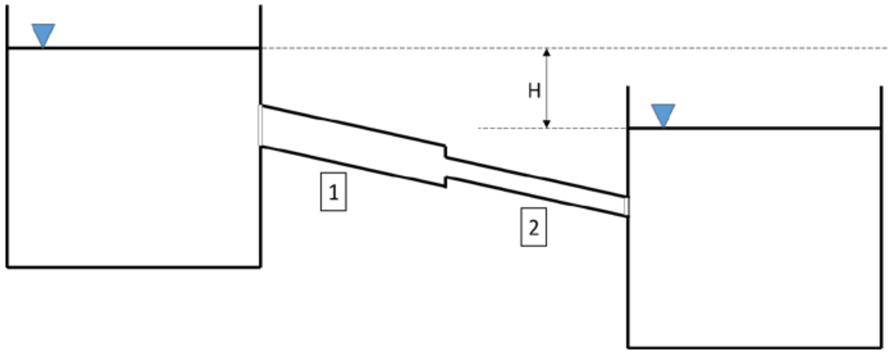
Si prendano in considerazione due serbatoi identici, di sezione circolare (diametro interno di 3 m), collegati dalle due tubazioni lisce secondo quanto riportato in figura, al cui interno scorre dell'olio (ρ=0.8 g/cm3, μ=10 cP). Sulle due tubazioni sono presenti delle perdite di carico a cui sono associati i coefficienti globali K1=5 e K2=10.

Si chiede di determinare il tempo necessario per portare il dislivello da H0=5m a HF=1m.

Dati:

L1 = 200 m   D1 = 50 mm

L2 = 200 m   D2 = 30 mm



Soluzione

Equazione di Bernoulli

$$\Delta H = H(t) \tag{7}$$

$$\Delta H = 4 f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + 4 f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} + K_1\frac{v_1^2}{2g} + K_2\frac{v_2^2}{2g} \tag{8}$$

$$\Delta H = \left[4 f_1 \frac{L_1}{D_1} + K_1\right]\frac{v_1^2}{2g} + \left[4 f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_2\right]\frac{v_2^2}{2g} \tag{9}$$

$$f = \frac{16}{\mathrm{Re}} = \frac{16\mu}{\rho v D} \tag{10}$$

$$\Delta H = \left[\frac{64\mu L_1}{\rho v_1 D_1^2} + K_1\right]\frac{v_1^2}{2g} + \left[\frac{64\mu L_2}{\rho v_2 D_2^2} + K_2\right]\frac{v_2^2}{2g} \tag{11}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \beta v_1 \tag{12}$$

$$\Delta H = \left[\frac{64\mu L_1}{\rho v_1 D_1^2} + K_1\right]\frac{v_1^2}{2g} + \left[\frac{64\mu L_2}{\rho \beta v_1 D_2^2} + K_2\right]\frac{\beta^2 v_1^2}{2g} \tag{13}$$

$$\Delta H = \left[\frac{64\mu L_1}{\rho v_1 D_1^2} + K_1 + \frac{64\beta\mu L_2}{\rho v_1 D_2^2} + \beta^2 K_2\right]\frac{v_1^2}{2g} = \left[\frac{64\mu L_1}{\rho v_1 D_1^2} + \frac{64\beta\mu L_2}{\rho v_1 D_2^2}\right]\frac{v_1^2}{2g} + \left[K_1 + \beta^2 K_2\right]\frac{v_1^2}{2g} \tag{14}$$

$$\Delta H=\left[\frac{32\mu L_1}{\gamma D_1^2}+\frac{32\beta\mu L_2}{\gamma D_2^2}\right]v_1+\left[K_1+\beta^2K_2\right]\frac{v_1^2}{2g}=\frac{32\mu}{\gamma}\left[\frac{L_1}{D_1^2}+\frac{\beta L_2}{D_2^2}\right]v_1+\frac{K_1+\beta^2K_2}{2g}v_1^2 \tag{15}$$

$$\Delta H=\frac{32\mu}{\gamma}\left[\frac{L_1}{D_1^2}+\frac{\beta L_2}{D_2^2}\right]v_1+\frac{K_1+\beta^2K_2}{2g}v_1^2=\varepsilon v_1+\delta v_1^2 \tag{16}$$

Bilancio di materia:

$$\frac{dV}{dx}=-A_1v_1 \tag{17}$$

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{A_1}{A_{S1}}v_1 \tag{18}$$

Dall'equazione di Bernoulli:

$$H=\varepsilon v_1+\delta v_1^2 \tag{19}$$

$$\frac{dH}{dt}=\varepsilon\frac{dv_1}{dt}+2\delta v_1\frac{dv_1}{dt}=\left(\varepsilon+2\delta v_1\right)\frac{dv_1}{dt} \tag{20}$$

Equazione differenziale da risolvere:

$$\begin{cases}\left(\varepsilon+2\delta v_1\right)\dfrac{dv_1}{dt}=-\dfrac{A_1}{A_{S1}}v_1\\ v_1\left(t=0\right)=v_1^0\end{cases} \tag{21}$$

$$\frac{\varepsilon+2\delta v_1}{v_1}dv_1=-\frac{A_1}{A_{S1}}dt \tag{22}$$

$$\int\left(\frac{\varepsilon}{v_1}+2\delta\right)dv_1=-\frac{A_1}{A_{S1}}t \tag{23}$$

$$\varepsilon\ln\frac{v_1}{v_1^0}+2\delta\left(v_1-v_1^0\right)=-\frac{A_1}{A_{S1}}t \tag{24}$$

$$t_F=-\frac{A_{S1}}{A_1}\left[\varepsilon\ln\frac{v_1^F}{v_1^0}+2\delta\left(v_1^F-v_1^0\right)\right] \tag{25}$$

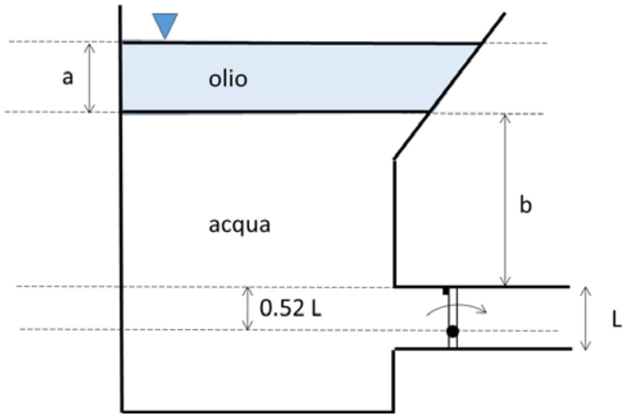
Dove:

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(v_1^0\right)^2 + \varepsilon v_1^0 - H_0 = 0 \\
&v_1^0 = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4\delta H_0}}{2\delta} \\
&\delta\left(v_1^F\right)^2 + \varepsilon v_1^F - H_F = 0 \\
&v_1^F = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4\delta H_F}}{2\delta}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Tema D
29 Novembre 2013

Esercizio 1 – Portello quadrato

Il disegno riportato a lato mostra un portello quadrato di lato L incernierato su un asse (a distanza pari a 0.52·L dalla base superiore), in grado di ruotare nella direzione riportata in figura. Il serbatoio è riempito di acqua (ρ=1000 kg/m3) nella parte inferiore (quella direttamente a contato con il portello) fino ad un'altezza *b* misurata a partire dalla base superiore del portello e olio (ρ=800 kg/m3) nella parte superiore.



Si chiede di determinare qual è il livello minimo di olio (ovvero la grandezza *a* riportata in figura) in grado di consentire la rotazione del portello.

Dati:
L = 100 mm
b = 250 mm

Soluzione

La condizione da imporre è che il punto di applicazione della spinta sul portello cada esattamente sulla cerniera. Se con yC indichiamo l'affondamento del punto di applicazione della spinta e con yG l'affondamento del baricentro del portello (entrambi misurati rispetto al piano dei carichi idrostatici dell'acqua), abbiamo:

$$y_C = y_G - \frac{L}{2} + \alpha L = y_G + L\frac{2\alpha - 1}{2} \qquad (27)$$

dove α=0.52 (secondo i dati del problema). Adesso è sufficiente sviluppare l'equazione sopra riportata:

$$y_C = \frac{\frac{L^4}{12} + L^2 y_G^2}{L^2 y_G} = \frac{L^2}{12 y_G} + y_G \qquad (28)$$

$$y_G + L\frac{2\alpha - 1}{2} = \frac{L^2}{12 y_G} + y_G \qquad (29)$$

Da qui troviamo la posizione che deve essere assunta dal baricentro:

$$y_G = \frac{L}{6(2\alpha - 1)} \qquad (30)$$

Sappiamo però anche che il baricentro si trova in corrispondenza della seguente posizione:

$$y_G = \frac{L}{2} + b + \frac{\gamma_O}{\gamma_A} a \tag{31}$$

Quindi, combinando le due abbiamo una sola equazione nell'incognita a:

$$\frac{L}{6(2\alpha - 1)} = \frac{L}{2} + b + \frac{\gamma_O}{\gamma_A} a \tag{32}$$

$$a = \left[\frac{2 - 3\alpha}{6\alpha - 3} L - b \right] \frac{\gamma_A}{\gamma_O} \tag{33}$$

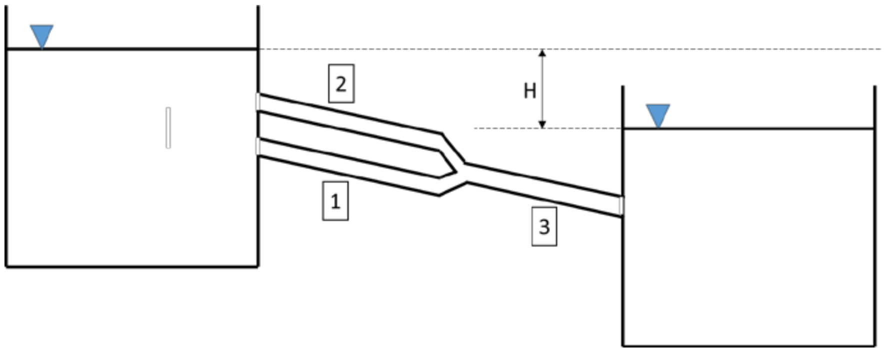
Esercizio 2 –Tubazione di collegamento tra serbatoi

Si prendano in considerazione due serbatoi collegati dalle tre tubazioni secondo quanto riportato in figura, al cui interno scorre dell'acqua (ρ=1 g/cm3, μ=1 cP). Sulla tubazione 3 è presente una valvola (non riportata in figura) che introduce una perdita di carico concentrata a cui è associato un coefficiente K=5. Le tre tubazioni sono scabre e hanno lo stesso indice di scabrezza pari a ε=1 mm. Si chiede di determinare la portata che complessivamente fluisce da un serbatoio all'altro in corrispondenza di un dislivello assegnato pari a H=50 m.

Si utilizzi opportunamente la seguente correlazione per il calcolo del fattore di attrito in condizioni turbolente: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K}{D} + \frac{1.255}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$

Dati:

L1 = 100 m	D1 = 50 mm
L2 = 150 m	D2 = 30 mm
L3 = 50 m	D3 = 60 mm



Soluzione

Equazione di Bernoulli

$$\Delta H = H(t) \tag{34}$$

$$\Delta H_1 = 4 f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + 4 f_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{v_3^2}{2g} + K_3 \frac{v_3^2}{2g} \tag{35}$$

$$\Delta H_2 = 4 f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} + 4 f_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{v_3^2}{2g} + K_3 \frac{v_3^2}{2g} \tag{36}$$

$$4 f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} = 4 f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} \tag{37}$$

$$f_1 \frac{L_1 v_1^2}{D_1} = f_2 \frac{L_2 v_2^2}{D_2} \tag{38}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\sqrt{\frac{L_1 D_2}{L_2 D_1}}v_1 = \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\beta v_1 \tag{39}$$

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 = v_3 A_3 \tag{40}$$

$$v_3 = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_3} \tag{41}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K}{D} + \frac{1.255}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \tag{42}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \approx -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K}{D}\right) \tag{43}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\beta v_1 \approx \frac{\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_2}{D_2}\right)}{\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_1}{D_1}\right)}\beta v_1 = \alpha_2 \beta v_1 \tag{44}$$

$$v_3 = \frac{v_1 A_1 + \alpha_2 \beta v_1 A_2}{A_3} = \frac{A_1 + \alpha_2 \beta A_2}{A_3} v_1 = \alpha_3 v_1 \tag{45}$$

$$\Delta H_1 = 4 f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + 4 f_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{\alpha_3^2 v_1^2}{2g} + K_3 \frac{\alpha_3^2 v_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}\left[4 f_1 \frac{L_1}{D_1} + \alpha_3^2 f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_3 \alpha_3^2\right] \tag{46}$$

$$v_1^2 = \frac{2g\Delta H_1}{\left[4 f_1 \frac{L_1}{D_1} + \alpha_3^2 f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_3 \alpha_3^2\right]} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f_1}} &\approx -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_1}{D_1}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{f_3}} &\approx -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_3}{D_3}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

Calcolo più accurato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f_1}} &\approx -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_1}{D_1} + \frac{1.255}{\mathrm{Re}_1\sqrt{f_1^{old}}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{f_2}} &\approx -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_2}{D_2} + \frac{1.255}{\mathrm{Re}_2\sqrt{f_2^{old}}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{f_3}} &\approx -4\log\left(\frac{1}{3.7}\frac{K_3}{D_3} + \frac{1.255}{\mathrm{Re}_3\sqrt{f_3^{old}}}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{f_1^{new}}{f_2^{new}}}\beta v_1 = \alpha_2^{new}\beta v_1 \tag{50}$$

$$v_3 == \frac{A_1 + \alpha_2^{new}\beta A_2}{A_3} v_1 = \alpha_3^{new} v_1 \tag{51}$$

$$v_1^2 = \frac{2g\Delta H_1}{\left[4 f_1^{new} \frac{L_1}{D_1} + \alpha_{3,new}^2 f_3^{new} \frac{L_3}{D_3} + K_3 \alpha_{3,new}^2\right]} \tag{52}$$