Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Soluzioni
28 Gennaio 2013

Esercizio – Evaporazione di acqua da una piscina riscaldata
Si consideri una piscina di forma rettangolare con lati di lunghezze pari a $L_1=5\ m$ e $L_2=3\ m$. La piscina è a contatto con l'aria dell'ambiente esterno che si trova alla temperatura di $T_{aria}=25°C$ e che presenta un tasso di umidità relativa φ pari al *52%*. Si vuol mantenere la temperatura dell'acqua della piscina al valore costante e uniforme di $T_{H2O}=50°C$ e a tale scopo si utilizza una resistenza elettrica in grado di fornire la potenza termica necessaria in modo tale da evitare il raffreddamento dell'acqua. Grazie ad un opportuno sistema di agitazione la temperatura dell'acqua può sempre essere considerata perfettamente uniforme. La superficie superiore della piscina è poi soggetta all'irraggiamento solare che fornisce un flusso termico costante e pari a $Q_{rad}=300\ W/m^2$.
Si chiede di determinare quale deve essere la potenza fornita dalla resistenza elettrica per mantenere la temperatura dell'acqua la valore costante richiesto. A tale scopo si tenga conto dei contributi termici dovuti alla radiazione, alla convezione naturale e all'evaporazione.

Proprietà dell'aria			
Conducibilità termica	0.026 W/m/K	Calore di evaporazione di H_2O	2380 kJ/kg
Numero di Pr	0.72	Tensione di vapore a 25°C	3.17 kPa
Diffusività termica	$2.5\cdot10^{-5}$ m²/s	Tensione di vapore a 50°C	12.35 kPa
Viscosità cinematica	$1.67\cdot10^{-5}$ m²/s	Diffusività H_2O in aria	$3\cdot10^{-5}$ m²/s

Per la stima dei coefficienti di scambio termico e materiale si utilizzino le seguenti correlazioni:

$$Nu = 0.15\left(Gr_{L_C}\ \mathrm{Pr}\right)^{1/3} \qquad Sh = 0.15\left(Gr_{L_C}\ Sc\right)^{1/3}$$

dove il numero di Gr è definito sulla differenza di densità parziale del vapor d'acqua (ovviamente tra la superficie della piscina e l'aria dell'ambiente):

$$Gr_{L_C} = \frac{gL_C^3 \cdot \Delta\rho_{vap}}{\rho_{aria}\upsilon_{aria}^2}$$

In particolare la lunghezza caratteristica Lc da utilizzare per la costruzione del numero di Gr sia definita come il rapporto tra la superficie della piscina e il perimetro della stessa.

Soluzione
a) Contributo dalla convezione forzata.
Stimiamo prima di tutto le densità parziali del vapore d'acqua sulla superficie (ρ_{sup}) della piscina e nel bulk (ρ_{bulk}) utilizzando i dati del problema:

$$\rho_{\sup} = \frac{P_v(50°C)PM_{H2O}}{RT_{H2O}} \qquad \rho_{bulk} = \phi\frac{P_v(25°C)PM_{H2O}}{RT_{air}} \tag{1}$$

Andiamo quindi a valutare il numero di Grashof utilizzando la definizione suggerita nel testo:

$$Gr_{L_C} = \frac{gL_C^3 \cdot \left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right)}{\rho_{aria}\upsilon_{aria}^2} \tag{2}$$

Da qui stimiamo il numero di Nusselt e quindi il coefficiente di scambio convettivo:

$$Nu = 0.15\left(Gr_{L_C}\ \mathrm{Pr}\right)^{1/3} \tag{3}$$

$$h_{conv} = \frac{Nuk_{aria}}{L_C} \tag{4}$$

Di conseguenza la potenza scambiata per convezione è data dalla seguente espressione:

$$Q_{conv} = h_{conv}A_{piscina}\Delta T = h_{conv}L_1L_2\left(T_{H2O} - T_{aria}\right) \tag{5}$$

b) Contributo dall'evaporazione.
La potenza ceduta a causa dell'evaporazione richiede la stima della portata di acqua evaporante ed è pari a:

$$Q_{ev} = \dot{m}_{ev}\Delta H_{ev} \tag{6}$$

Per stimare la portata di acqua evaporante dobbiamo avere a disposizione il coefficiente di scambio di materia:

$$Sh = 0.15\left(Gr_{L_C} Sc\right)^{1/3} \tag{7}$$

$$h_m = \frac{Sh\Gamma_{H2O/aria}}{L_C} \tag{8}$$

dove il numero di Grashof è lo stesso calcolato per lo scambio termico e il numero di Sc si valuta con i dati del problema.
Quindi la portata di acqua evaporante risulta:

$$\dot{m}_{ev} = h_m L_1 L_2 \left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right) \tag{9}$$

c) Valutazione della potenza termica della resistenza
La potenza termica che la resistenza dovrà garantire sarà dunque:

$$Q_{res} = Q_{ev} + Q_{conv} - Q_{rad} \tag{10}$$

Esercizio – Evaporazione di acqua da una maglia stesa ad asciugare

Si consideri una maglia bagnata stesa ad asciugare in aria alla temperatura di T_{aria}*=25°C* e un tasso di umidità relativa φ pari al *52%*. Si immagini che l'aria sia in movimento alla velocità *v=5 m/s* a causa dell'azione del vento.

Si chiede di determinare: a) la temperatura a cui si porta la maglia immaginando che il calore necessario per l'evaporazione sia tutto e solo quello fornito dalla convezione forzata; b) il flusso di acqua evaporante nelle condizioni assegnate.

Si stimi il numero di *Nu* (da utilizzare per il coefficiente di scambio termico *h*) con la seguente correlazione:

$$Nu = 0.15\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

dove la lunghezza caratteristica da utilizzare per la costruzione del numero di Reynolds è pari a *L=40 cm*. Per il calcolo del coefficiente di scambio di materia h_m si tenga conto della seguente analogia (di Colburn):

$$h_m = \frac{h}{\rho C_P \left(\dfrac{\alpha}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}}$$

Proprietà dell'aria			
Conducibilità termica	0.026 W/m/K	Calore di evaporazione di H_2O	2380 kJ/kg
Numero di Pr	0.72	Tensione di vapore dell'acqua	3.17 kPa
Diffusività termica	$2.5\cdot10^{-5}$ m²/s	Diffusività H_2O in aria	$3\cdot10^{-5}$ m²/s
Viscosità cinematica	$1.67\cdot10^{-5}$ m²/s		
Calore specifico	1000 J/kg/K		

Soluzione

Dal momento che tutta la potenza termica assorbita dalla maglia per convezione vien utilizzata per il processo di evaporazione, possiamo scrivere:

$$hA\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) = \dot{m}_{ev} A \Delta H_{ev} \tag{11}$$

a) Questa eguaglianza di potenze può essere utilizzata per trovare la temperatura a cui si porta la maglia. Infatti:

$$hA\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) = h_m\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right) A \Delta H_{ev} \tag{12}$$

$$h\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) = \frac{h}{\rho_{aria} C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}}\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right)\Delta H_{ev} \tag{13}$$

$$T_{maglia} = T_{aria} - \frac{\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right)\Delta H_{ev}}{\rho_{aria} C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}} = T_{aria} - \frac{\rho_{\sup} - \rho_{bulk}}{\rho_{aria}} \frac{\Delta H_{ev}}{C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}} \tag{14}$$

b) Il flusso di acqua evaporante può quindi essere stimata dopo aver calcolato il coefficiente di scambio termico:

$$Nu = 0.15\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{15}$$

$$h = \frac{Nu \cdot k_{aria}}{L} \tag{16}$$

$$h_m = \frac{h}{\rho_{aria} C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}} \tag{17}$$

$$\frac{\dot{m}_{ev}}{A} = j = h_m\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right) \tag{18}$$

Esercizio – Raffreddamento di un serbatoio cilindrico

Un serbatoio cilindrico di acciaio (k_{ac}=26 W/m/K) di diametro interno D=1 m e altezza H=3 è disposto verticalmente secondo quanto riportato in figura. Al suo interno è contenuto un olio alla temperatura iniziale T_0=70°C. Il serbatoio è esposto all'azione di un vento alla temperatura $T_{aria}=25°C$ che si muove perpendicolarmente al suo asse con velocità pari a 5 m/s. Si chiede di determinare qual è la potenza che l'olio all'interno del serbatoio cede verso l'esterno nelle condizioni iniziali assegnate. Si assuma la base inferiore perfettamente adiabatica e si consideri uno spessore delle pareti del serbatoio pari a *s=3 mm*.

Dal lato esterno si utilizzino le seguenti correlazioni per la stima del numero di Reynolds, rispettivamente per la superficie laterale e per la superficie di base:

$$Nu = 0.5\,\mathrm{Re}_D^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad\qquad Nu = 0.30\,\mathrm{Re}_D^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

Dal lato interno si assuma invece che il numero di Nu sia dato dalla seguente correlazione:

$$Nu = 0.15\left(Gr\,\mathrm{Pr}\right)^{1/3}$$

Proprietà dell'aria		**Proprietà dell'olio**	
Conducibilità termica	0.026 W/m/K	Conducibilità termica	0.12 W/m/K
Numero di Pr	0.72	Densità	800 kg/m^3
Diffusività termica	2.5·10^{-5} m^2/s	Diffusività termica	2000 J/kg/K
Viscosità cinematica	1.67·10^{-5} m^2/s	Viscosità cinematica	*5 cP*

Soluzione

La potenza complessivamente scambiata dal serbatoio è pari alla potenza scambiata attraverso la superficie laterale e quella di base superiore:

$$Q = Q_{lat} + Q_{base} = \left(U_{lat}\pi DH + U_{base}\frac{\pi D^2}{4}\right)\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) \tag{19}$$

I coefficienti di scambio globali devono tener conto delle resistenze interne (convezione naturale), della parete di acciaio e delle resistenze esterne (convezione forzata):

$$\frac{1}{U_{lat}} = \frac{1}{h_{lat}^{\mathrm{int}}} + \frac{s_{ac}}{k_{ac}} + \frac{1}{h_{lat}^{est}} \qquad\qquad \frac{1}{U_{base}} = \frac{1}{h_{base}^{\mathrm{int}}} + \frac{s_{ac}}{k_{base}} + \frac{1}{h_{base}^{est}} \tag{20}$$

I coefficienti di scambio dal lato interno sono gli stessi per la base e la superficie laterale e si calcolano come:

$$h_{lat}^{\mathrm{int}} = h_{base}^{\mathrm{int}} = \frac{Nu \cdot k_{H2O}}{H} = \frac{0.15\left(Gr_H\,\mathrm{Pr}\right)^{1/3} k_{H2O}}{H} \tag{21}$$

dove il numero di Grashof è definito ovviamente sull'altezza H:

$$Gr_H = \frac{gH^3\beta\Delta T}{\upsilon^2} \tag{22}$$

Sul lato esterno i coefficienti di scambio hanno invece valori diversi:

$$h_{lat}^{est} = \frac{Nu \cdot k_{aria}}{D} = \frac{0.15\,\mathrm{Re}_D^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,k_{aria}}{D} \tag{23}$$

$$h_{base}^{est} = \frac{Nu \cdot k_{aria}}{D} = \frac{0.15\,\mathrm{Re}_D^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,k_{aria}}{D} \tag{24}$$

Esercizio – Diffusione di He attraverso un serbatoio cilindrico

Si consideri un serbatoio cilindrico di acciaio di altezza $H=3\ m$ e diametro interno pari a $D=1\ m$, le cui pareti abbiano uno spessore $s_{ac}=5\ mm$. All'interno del serbatoio è contenuto un gas con peso molecolare pari a $M_{gas}=44\ kg/kmol$ alla pressione $P=15\ atm$, contenente una frazione molare di He ($M_{He}=2\ kg/kmol$) pari a *3 ppm* (parti per milione). Le pareti del serbatoio sono di fatto perfettamente impermeabili al gas contenuto nel recipiente, ma non nei confronti dell'elio, che può quindi diffondere (sebbene molto lentamente verso l'esterno).

a) Si chiede di determinare il tempo necessario perché il *99%* dell'He contenuto nel serbatoio fuoriesca verso l'esterno.

b) Se il serbatoio venisse rivestito esternamente con un sottile strato di un secondo materiale isolante ($s_{iso}=1mm$), come si modificherebbe il tempo calcolato al punto precedente?

Si assuma che le diffusività dell'elio nell'acciaio e nell'isolante siano rispettivamente pari a: $\Gamma_{He/ac}= 8\cdot 10^{-11}\ cm^2/s$ e $\Gamma_{He/iso}= 5\cdot 10^{-12}\ cm^2/s$.

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto il flusso diffusivo di He verso l'esterno utilizzando la legge di Fick:

$$J_{He}=\frac{\Delta C_{He}}{R}=\frac{C_{He}^{\text{int}}-C_{He}^{est}}{\frac{s_{ac}}{\Gamma_{ac}}}=\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}\left(C_{He}^{\text{int}}-C_{He}^{est}\right)=\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}C_{He}^{\text{int}} \tag{25}$$

Andiamo quindi a scrivere un bilancio globale:

$$\frac{dn_{He}}{dt}=-J_{He}\left(2\pi\frac{D^2}{4}+\pi DH\right)=-\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}C_{He}^{\text{int}}\left(2\pi\frac{D^2}{4}+\pi DH\right)=-\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}C_{He}^{\text{int}}\pi D\left(\frac{D}{2}+H\right) \tag{26}$$

$$\frac{dn_{He}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(C_{He}^{\text{int}}\cdot V\right)=V\frac{dC_{He}^{\text{int}}}{dt} \tag{27}$$

$$\frac{dC_{He}^{\text{int}}}{dt}=-\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}C_{He}^{\text{int}}\frac{\pi D}{V}\left(\frac{D}{2}+H\right)=-\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}\frac{4}{DH}\left(\frac{D}{2}+H\right)C_{He}^{\text{int}} \tag{28}$$

L'equazione differenziale sopra riportata è facilmente integrabile:

$$\frac{dC_{He}^{\text{int}}}{C_{He}^{\text{int}}}=-\frac{\Gamma_{ac}}{s_{ac}}\frac{4}{DH}\left(\frac{D}{2}+H\right)=-\beta \tag{29}$$

$$\ln\frac{C_{He}^{\text{int}}}{C_{He,0}^{\text{int}}}=-\beta t \tag{30}$$

$$t=-\frac{\ln\frac{C_{He}^{\text{int}}}{C_{He,0}^{\text{int}}}}{\beta}=-\frac{\ln\frac{0.01C_{He,0}^{\text{int}}}{C_{He,0}^{\text{int}}}}{\beta}=-\frac{\ln(0.01)}{\beta} \tag{31}$$

Nel caso b) l'unica differenza riguarda la stima della resistenza:

$$J_{He}=\frac{\Delta C_{He}}{R}=\frac{C_{He}^{\text{int}}-C_{He}^{est}}{\frac{s_{ac}}{\Gamma_{ac}}+\frac{s_{iso}}{\Gamma_{iso}}}=\frac{\Gamma_{iso}\Gamma_{ac}}{s_{ac}\Gamma_{iso}+s_{iso}\Gamma_{ac}}C_{He}^{\text{int}}=\frac{\Gamma_{iso}\Gamma_{ac}}{s_{ac}\Gamma_{iso}+s_{iso}\Gamma_{ac}}C_{He}^{\text{int}} \tag{32}$$

$$\frac{dC_{He}^{\text{int}}}{C_{He}^{\text{int}}}=-\frac{\Gamma_{iso}\Gamma_{ac}}{s_{ac}\Gamma_{iso}+s_{iso}\Gamma_{ac}}\frac{4}{DH}\left(\frac{D}{2}+H\right)=-\lambda \tag{33}$$

$$\ln\frac{C_{He}^{\text{int}}}{C_{He,0}^{\text{int}}}=-\lambda t \tag{34}$$

$$t=-\frac{\ln\frac{C_{He}^{\text{int}}}{C_{He,0}^{\text{int}}}}{\lambda}=-\frac{\ln\frac{0.01C_{He,0}^{\text{int}}}{C_{He,0}^{\text{int}}}}{\lambda}=-\frac{\ln(0.01)}{\lambda} \tag{35}$$

Nota
Una soluzione più rigorosa dovrebbe prevedere il calcolo della resistenza del guscio cilindrico e delle due lastre piane delle basi come resistenze in parallelo:

$$\frac{dn_{He}}{dt} = -\frac{C_{He}^{\text{int}}}{R_{tot}} \tag{36}$$

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_{cil}} + \frac{2}{R_{base}} = \frac{2\pi H \Gamma_{acc}}{\ln \frac{D+2s_{acc}}{D}} + 2\frac{\pi D^2 \Gamma_{acc}}{4s_{acc}} = 2\pi\Gamma_{acc}\left(\frac{H}{\ln \frac{D+2s_{acc}}{D}} + \frac{D^2}{4s_{acc}}\right) \tag{37}$$

In realtà, dal momento che s è molto più piccolo di D, l'espressione sopra riportata è approssimabile come:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_{cil}} + \frac{2}{R_{base}} = 2\pi\Gamma_{acc}\left(\frac{DH}{2s_{acc}} + \frac{D^2}{4s_{acc}}\right) = \pi D\frac{\Gamma_{acc}}{s_{acc}}\left(H + \frac{D}{2}\right) \tag{38}$$

Di conseguenza si ritrova il bilancio di prima:

$$\frac{dn_{He}}{dt} = -\pi D\frac{\Gamma_{acc}}{s_{acc}}\left(H + \frac{D}{2}\right)C_{He}^{\text{int}} \tag{39}$$

Esercizio – Oggetto metallico immerso in un bagno d'acqua

Si immagini di avere una massa di acqua pari a $m_{H2O}=5\ kg$ alla temperatura di 90°C all'interno in un contenitore perfettamente adiabatico. All'interno di tale contenitore viene immerso un corpo metallico di massa $m_{met}=1\ kg$ e superficie $A=50\ cm^2$ alla temperatura iniziale $T_0=10°C$.

Si chiede di effettuare dei calcoli in corrispondenza di due diverse situazioni.

a) Immaginando che il sistema oggetto + acqua sia complessivamente adiabatico, si determini la temperatura di regime T_∞ a cui si portano i due corpi (in corrispondenza cioè di un tempo infinitamente lungo).

b) Si immagini invece che al momento dell'immersione del corpo metallico entrino in azione un sistema di agitazione meccanica in grado di mantenere una perfetta miscelazione dell'acqua e una resistenza elettrica avente lo scopo di mantenere la temperatura dell'acqua sempre alla temperatura di 90°C. Si chiede di determinare la potenza termica Q (in funzione del tempo) che la resistenza dovrà fornire per mantenere costante la temperatura dell'acqua. In particolare si determinino i valori di Q in corrispondenza dei tempi seguenti: *t=0, 10, 100 e 1000 s*. A tale scopo si utilizzi un coefficiente di scambio termico $U=10\ W/m^2/K$.

Proprietà dell'acqua		**Proprietà dell'acciaio**	
Conducibilità termica	0.2 W/m/K	Conducibilità termica	26 W/m/K
Calore specifico	4186 J/kg/K	Calore specifico	500 J/kg/K
Densità	1 g/cm^3	Densità	7500 kg/m^3
Viscosità cinematica	1 cP		

Soluzione

a) I bilanci di energia sul corpo metallico e sulla massa d'acqua sono i seguenti:

$$m_{og} C_{Pog} \frac{dT_{og}}{dt} = UA_{og}(T_{H2O} - T_{og}) \tag{40}$$

$$m_{H2O} C_{PH2O} \frac{dT_{H2O}}{dt} = -UA_{og}(T_{H2O} - T_{og}) \tag{41}$$

Quindi:

$$m_{og} C_{Pog} \frac{dT_{og}}{dt} = -m_{H2O} C_{PH2O} \frac{dT_{H2O}}{dt} \tag{42}$$

$$\frac{dT_{og}}{dT_{H2O}} = -\frac{m_{H2O} C_{PH2O}}{m_{og} C_{Pog}} \tag{43}$$

$$\frac{T_{og}^f - T_{og}^0}{T_{H2O}^f - T_{H2O}^0} = -\frac{m_{H2O} C_{PH2O}}{m_{og} C_{Pog}} \tag{44}$$

A regime le temperature dell'acqua e dell'oggetto metallico sono le stesse e quindi:

$$T_\infty = T_{og}^0 + \frac{m_{H2O} C_{PH2O}}{m_{og} C_{Pog}} \left(T_{H2O}^0 - T_\infty \right) = T_{og}^0 + \frac{m_{H2O} C_{PH2O}}{m_{og} C_{Pog}} T_{H2O}^0 - \frac{m_{H2O} C_{PH2O}}{m_{og} C_{Pog}} T_\infty \tag{45}$$

$$T_\infty = \frac{m_{og} C_{Pog} T_{og}^0 + m_{H2O} C_{PH2O} T_{H2O}^0}{m_{og} C_{Pog} + m_{H2O} C_{PH2O}} \tag{46}$$

b) Scriviamo il bilancio termico sull'oggetto metallico tenendo in considerazione il fatto che la temperatura dell'acqua è costante nel tempo:

$$m_{og} C_{Pog} \frac{dT_{og}}{dt} = UA_{og}(T_{H2O} - T_{og}) \tag{47}$$

Il coefficiente di scambio globale è costante e quindi:

$$\frac{dT_{og}}{T_{og} - T_{H2O}} = -\frac{UA_{og}}{m_{og} C_{Pog}} \tag{48}$$

$$\ln \frac{T_{og} - T_{H2O}}{T_{og}^0 - T_{H2O}} = -\frac{UA_{og}}{m_{og} C_{Pog}} \tag{49}$$

$$T_{og} = T_{H2O} - \left(T_{H2O} - T_{og}^{0}\right) e^{-\frac{UA_{og}}{m_{og} C_{Pog}} t} \tag{50}$$

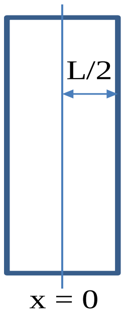
La potenza termica che la resistenza dovrà fornire varierà dunque secondo la seguente espressione:

$$Q = UA_{og}\left(T_{H2O} - T_{og}\right) = UA_{og}\left(T_{H2O} - T_{H2O} + \left(T_{H2O} - T_{og}^{0}\right) e^{-\frac{UA_{og}}{m_{og} C_{Pog}} t}\right) = UA_{og}\left(T_{H2O} - T_{og}^{0}\right) e^{-\frac{UA_{og}}{m_{og} C_{Pog}} t} \tag{51}$$

Lastra piana con generazione calore

Si consideri una lastra piana di spessore *L=4 cm* e conducibilità *k=20 W/m/K*, al cui interno si ha una generazione di calore $g_c = 8 \cdot 10^6$ *W/m³* dovuta al passaggio di corrente elettrica. Determinare il profilo di temperatura all'interno della lastra e la temperatura massima raggiunta nel caso in cui:

a. Le 2 facce estese siano mantenute alla stessa T_p = 30 °C
b. La faccia a $x = 0$ si trovi a T_0 = 10 °C e la faccia a la faccia $x = L$ a T_L = 90 °C



Soluzione:

a. Il profilo di temperatura nella lastra piana si ricava dall'equazione di Fick generalizzata:

$$K\frac{d^2T}{dx^2} + g_c = 0 \tag{52}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{g_c}{K}x + A \tag{53}$$

$$T = -\frac{g_c}{2K}x^2 + Ax + B \tag{54}$$

Le costanti di integrazione si trovano imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} x = 0 & \dfrac{dT}{dx} = 0 \\ x = \dfrac{L}{2} & T = T_p \end{cases} \tag{55}$$

$$T = T_p + \frac{g_c}{2K}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right) \tag{56}$$

Il massimo è in corrispondenza di x=0:

$$T_{max} = T_p + \frac{g_c}{2K}\frac{L^2}{4} \tag{57}$$

b. Si procede allo stesso modo, ma con condizioni al contorno diverse:

$$T = -\frac{g_c}{2K}x^2 + Ax + B \tag{58}$$

$$\begin{cases} x = 0 & T = T_0 \\ x = L & T = T_L \end{cases} \tag{59}$$

$$T = T_0 - \frac{g_c L^2}{2K}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(T_p - T_0 + \frac{g_c L^2}{2K}\right)\frac{x}{L} \tag{60}$$

Per individuare il massimo è sufficiente azzerare la derivata prima del profilo:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{g_c}{K}x + \left(\frac{T_p - T_0}{L} + \frac{g_c L}{2K}\right) = 0 \tag{61}$$

$$x_{max} = \frac{K}{g_c}\left(\frac{T_p - T_0}{L} + \frac{g_c L}{2K}\right) = \frac{K}{g_c}\frac{\left(T_p - T_0\right)}{L} + \frac{L}{2} \tag{62}$$

$$T_{max} = T\left(x_{max}\right) \tag{63}$$

Riscaldamento/raffreddamento acqua

Un recipiente metallico, chiuso e sferico del diametro *D=8 cm* e perfettamente miscelato contiene acqua alla temperatura di *25 °C*. A partire dal tempo *t=0* il recipiente viene coibentato in modo da renderlo completamento adiabatico e viene attivata una resistenza elettrica che genera una potenza termica *Q=1000 W*.

a) Dopo quanto tempo la temperatura dell'acqua raggiunge i *50 °C*?

b) Una volta raggiunta la temperatura di *50 °C*, viene rimossa la coibentatura e la resistenza elettrica viene spenta. La superficie esterna del recipiente è esposta all'aria a *T=25 °C* e il calore è rimosso con l'ausilio di un ventilatore che imprime all'aria una velocità di *10 m/s*. In quanto tempo la temperatura dell'acqua scende a *30 °C*?

Proprietà

Acqua: densità $1\ g/cm^3$; calore specifico *4.186 kJ/kg/K*.

Aria: viscosità $1.8\cdot10^{-5}\ Pa\cdot s$; conducibilità *0.025 W/m/K*; calore specifico *1010 J/kg/K*

Soluzione:

a. Riscaldamento:

$$m\frac{d\tilde{E}}{dt}=\dot{Q} \tag{64}$$

$$\rho Vc\frac{dT}{dt}=\dot{Q} \tag{65}$$

$$T=T_0+\frac{\dot{Q}}{\rho Vc}t \tag{66}$$

$$t=\left(T-T_0\right)\frac{\rho Vc}{\dot{Q}} \tag{67}$$

b. Raffreddamento:

$$\rho Vc\frac{dT}{dt}=h\left(T_a-T\right)A \tag{68}$$

$$\int_{T_c}^{T_f}\frac{dT}{\left(T_a-T\right)}=\int_0^t\frac{hA}{\rho Vc}dt \tag{69}$$

$$-\ln\frac{T_a-T_f}{T_a-T_c}=\frac{hA}{\rho Vc}t \tag{70}$$

$$\ln\frac{T_a-T_c}{T_a-T_f}=\frac{hA}{\rho Vc}t \tag{71}$$

Spessore refrattario
La parete di un forno largo *L=3 m* e alto *H=10 m* deve essere rivestita con mattoni isolanti di conduttività termica *k = 0.50 W/m/K*. Sapendo che la temperatura massima della parete di mattoni dal lato del forno è di T_1*=400 °C*, calcolare lo spessore di mattoni per garantire una temperatura della superficie esterna pari a *100°C*. Considerare l'aria esterna a una temperatura di *30 °C* e due diverse condizioni di vento: nullo e pari a *10 m/s*.
Per questioni di costi non si vuole superare uno spessore di mattoni *s=80 cm*. Si chiede di valutare quante intercapedini d'aria dello spessore di 1 cm si debbano introdurre nella parete per consentire di non superare lo spessore limite.
Proprietà aria: viscosità $1.8{\cdot}10^{-5}$ *Pa·s*; conducibilità *0.025 W/m/K*; calore specifico *1.010 kJ/kg/K.*

Correlazioni:

$$Nu = 0.037\,\mathrm{Re}^{0.80}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad\qquad Nu = \left\{0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$$

Soluzione:
Lo spessore si trova dall'eguaglianza dei flussi (ovvero delle potenze) termiche:

$$\dot{Q} = \frac{k}{s}\left(T_{p1} - T_{p2}\right) = h\left(T_{p2} - T_A\right) \tag{72}$$

$$s = \frac{k_{mat}\left(T_{p1} - T_{p2}\right)}{h_{est}\left(T_{p2} - T_A\right)} \tag{73}$$

Il coefficiente di scambio termico si trova ovviamente con le correlazioni proposte nel testo. In un caso dovrà essere considerata la convezione forzata; nell'altro quella naturale.

a. Convezione forzata (v=10 m/s)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{aria} vL}{\mu_{aria}} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_{aria} c_{p,aria}}{k_{aria}} \tag{74}$$

$$Nu = 0.037\,\mathrm{Re}^{0.80}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{75}$$

$$h_{forz} = \frac{Nu k_{aria}}{L} \tag{76}$$

b. Convezione naturale

$$\mathrm{Gr} = \frac{\rho^2 g\beta\left(T_{p2} - T_A\right)H^3}{\mu^2} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_{aria} c_{p,aria}}{k_{aria}} \tag{77}$$

$$Nu_{nat} = \left\{0.825 + \frac{0.387\left(Gr\,\mathrm{Pr}\right)^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 \tag{78}$$

$$h_{nat} = \frac{Nu k_{aria}}{L} \tag{79}$$

Con i dati proposti nel testo in entrambi i casi si ottiene uno spessore minore di quello massimo accettabile. Nel caso generale, se si volesse individuare il numero di intercapedini necessarie, sarebbe sufficiente considerare le corrispondenza resistenze in serie:

$$U_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{h_{est}} + \frac{s_{mat}}{k_{mat}} + \frac{ns_{aria}}{k_{aria}}} = \frac{h_{est} k_{aria} k_{mat}}{k_{aria} k_{mat} + s_s h_{est} k_{aria} + ns_{aria} h k_{mat}} \tag{80}$$

Andando a eguagliare le potenze:

$$U_{tot} A \left(T_{p1} - T_A\right) = h_{est} A \left(T_{p2} - T_A\right) \tag{81}$$

$$n = \frac{K_A K_s \left(T_{p1} - T_A\right) - \left(T_{p2} - T_A\right)\left(K_A K_s + s_s h K_A\right)}{\left(T_{p2} - T_A\right) s_A h K_s} \tag{82}$$

Diffusione

Un recipiente di volume *V=10 l* contiene una miscela di due gas A e B perfettamente miscelati. La parete superiore del recipiente è costituita da una membrana porosa di forma rettangolare di *10 x 50 cm* e spessore *s=0.1 mm*. La membrana è investita esternamente in modo parallelo al lato più lungo da una corrente gassosa di B puro ad una velocità di *1 m/s*. La diffusività effettiva di A nella membrana è $D_{eff}=10^{-2}\ cm^2/s$. Sapendo che la concentrazione iniziale di A nel recipiente è $c_0 = 0.5\ mol/l$, calcolare il tempo necessario affinché la concentrazione di A scenda al valore di *0.05 mol/l*.
La specie B è un gas con densità $\rho_B=1.5\ kg/m^3$ e viscosità $\mu_B=5\cdot10^{-5}\ Pa\cdot s$. Il coefficiente di diffusione binaria $D_{AB}=5\cdot10^{-5}\ m^2/s$.

Soluzione:

E' sufficiente scrivere un bilancio di materia non stazionario:

$$\frac{dn_A}{dt} = -U_m\left(c_A - 0\right)A \tag{83}$$

$$V\frac{dc_A}{dt} = -U_m c_A A \tag{84}$$

$$\int_{c_A^0}^{c_A^f}\frac{dc_A}{c_A} = -\int_0^t \frac{U_m A}{V}dt \tag{85}$$

$$\ln\frac{c_A^f}{c_A^0} = -\frac{U_m A}{V}t \tag{86}$$

$$t = \frac{V}{U_m A}\ln\frac{c_A^0}{c_A^f} \tag{87}$$

dove:

$$\frac{1}{U_m} = \frac{s}{D_{eff}} + \frac{1}{h_m} \tag{88}$$

Sublimazione naftalina

Una sfera solida di diametro *D=5 cm* è rivestita da un sottile strato di naftalina (peso molecolare *W=128 g/mol*, densità allo stato solido *ρ=1.15 g/cm3*) di spessore *δ =1mm*. Alla temperatura di *80°C* la naftalina ha una tensione di sublimazione pari a p_s*=10 mm Hg*. Una corrente di aria pura ($\mu=1.8\cdot10^{-5}$ *Pa·s*) a *80°C* investe la sfera alla velocità *v=2 cm/s* rimuovendo lo strato di naftalina per trasporto convettivo di materia. In virtù del piccolo spessore di naftalina rispetto al diametro della sfera, la geometria del sistema si può ritenere costante nel tempo, così come le condizioni di trasporto di materia. Il coefficiente binario di diffusione della naftalina in aria in fase gas $D_{NA}=2\cdot10^{-6}\ m^2/s$. Si calcoli, in condizioni stazionarie, il tempo necessario a consumare tutto lo strato di naftalina.
Si ricorda che la relazione di convezione attorno a una sfera vale:

$$Sh = 2 + (0.4Re^{1/2}+0.06Re^{2/3})Sc^{0.4}$$

Soluzione:

E' sufficiente scrivere un bilancio di materia non stazionario:

$$\frac{\mathrm{dn_N}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{h_m}\left(\mathrm{c_N^0} - 0\right)\pi \mathrm{D}^2 = -\mathrm{h_m c_N^0}\pi\mathrm{D}^2 \qquad (89)$$

$$\mathrm{c_N^0} = \frac{\mathrm{p_s}}{\mathrm{RT}} \qquad (90)$$

$$\frac{\mathrm{dn_N}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{h_m c_N^0}\pi\mathrm{D}^2 = -\mathrm{h_m}\pi\mathrm{D}^2\frac{\mathrm{p_s}}{\mathrm{RT}} \qquad (91)$$

$$\mathrm{n_N} = -\mathrm{h_m}\pi\mathrm{D}^2\frac{\mathrm{p_s}}{\mathrm{RT}}\mathrm{t} + \mathrm{n}_N^0 \qquad (92)$$

Il numero totale di moli di naftalina da far sublimare è il seguente:

$$\mathrm{n}_N^0 = \frac{\rho_N \mathrm{V}_N}{PM_N} = \frac{\rho_N}{PM_N}\frac{\pi}{6}\left[\left(D+2\delta\right)^3 - D^3\right] \approx \frac{\rho_N}{PM_N}\pi D^2\delta \qquad (93)$$

Quindi:

$$\mathrm{n_N} = -\mathrm{h_m}\pi\mathrm{D}^2\frac{\mathrm{p_s}}{\mathrm{RT}}\mathrm{t} + \frac{\rho_N\pi\mathrm{D}^2\delta}{PM_N} \qquad (94)$$

$$\mathrm{t_{fin}} = \frac{\rho_N \cancel{\pi\mathrm{D}^2}\,\delta}{PM_N}\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{h_m}\cancel{\pi\mathrm{D}^2}\,\mathrm{p_s}} = \frac{\rho\delta\mathrm{RT}}{\mathrm{PM}_N\mathrm{h_m p_s}} \qquad (95)$$

Perdita Elio

Un gas è stoccato a *20 °C* in un serbatoio sferico di silice di diametro *D=1 cm* e spessore *s=2 mm*. Se il serbatoio è inizialmente caricato a una pressione di *4 bar*, qual è la pressione a cui si trova dopo una giornata, sapendo che il coefficiente di diffusione (D_{AB}) del gas nella silice è $4\cdot10^{-11}$ *m²/s* e che la sua solubilità (S) sempre nella silice è pari a 10^{-4} *kmol/m³/bar*?

Dato che *D>>s* si assuma che la diffusione possa essere approssimata a quella attraverso una lastra piana e che possa essere considerata in condizioni pseudo-stazionarie (ovvero la variazione di pressione è così lenta che consente di considerare la diffusione in condizioni stazionarie a ogni istante).

Si assuma anche trascurabile la pressione dell'elio all'esterno del serbatoio.

Soluzione:

E' sufficiente scrivere un bilancio di materia non stazionario:

$$\frac{dm_A}{dt} = -\dot{m}_A \tag{96}$$

$$V\frac{d\rho_A}{dt} = \frac{VW_A}{RT}\frac{dp_A}{dt} = -\dot{m}_A \tag{97}$$

$$\dot{m}_A = AD_{AB}\frac{\rho_A^{in} - \rho_A^{out}}{s} \tag{98}$$

$$\rho_A^{in} = W_A S p_A \qquad \rho_A^{out} = 0 \tag{99}$$

$$\dot{m}_A = AD_{AB}\frac{W_A S p_A}{s} \tag{100}$$

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{RT}{VW_A}AD_{AB}\frac{W_A S p_A}{s} \tag{101}$$

$$\frac{dp_A}{p_A} = -\frac{6RT}{Ds}D_{AB}S\,dt \tag{102}$$

$$\int_{p_A^0}^{p_A^{fin}}\frac{dp_A}{p_A} = -\frac{6RT}{Ds}D_{AB}S\int_0^t dt \tag{103}$$

$$\ln\frac{p_A^{fin}}{p_A^0} = -\frac{6RT}{Ds}D_{AB}St \tag{104}$$

$$p_A^{fin} = p_A^0 e^{-\frac{6RTD_{AB}S}{Ds}t} \tag{105}$$