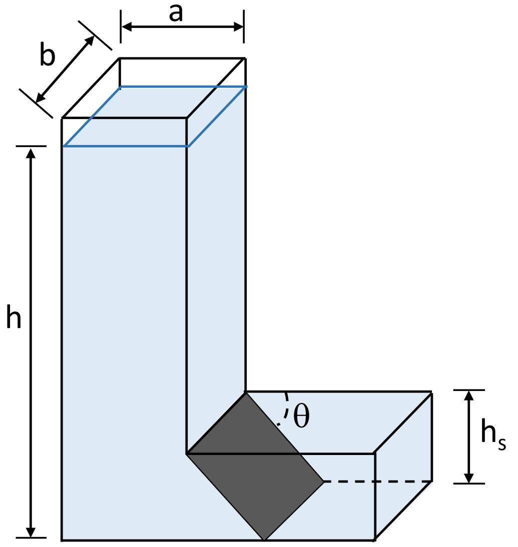
Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Tema A
27 Novembre 2015

Esercizio 1 - Efflusso

Si calcoli l'altezza di acqua h necessaria ad aprire la paratoia metallica, incernierata lungo il lato superiore. Una volta trovato h, nell'ipotesi che la paratoia venga tenuta completamente aperta, si determini la portata inizialmente fluente attraverso il passaggio aperto (nell'ipotesi di condizioni stazionarie), supponendo che lo scarico a valle sia libero e assumendo un coefficiente di contrazione pari a 0.61



Dati:

h_s = 30cm
peso paratoia = 5000 N
b = 2m
a = 1m
θ = 45°

Soluzione

$$S = \rho g A l_G$$

$$l_G = h - \frac{h_s}{2} \qquad l_G = y_G \sin\theta$$

$$y_C = \frac{I_0}{y_G A} + y_G \qquad I_0 = \frac{b\left(\dfrac{h_s}{\sin\theta}\right)^3}{12}$$

$$d = y_C - \frac{h - h_s}{\sin\theta}$$ distanza tra centro di spinta e cerniera

Sostituendo y_G e riorganizzando:

$$d = \frac{I_0}{y_G A} + y_G - \frac{h-h_s}{\sin\theta} = \frac{I_0}{y_G A} + \left(h - \frac{h_s}{2}\right)\frac{1}{\sin\theta} - \frac{h-h_s}{\sin\theta} = \frac{I_0}{y_G A} + \left(\frac{h_s}{2}\right)\frac{1}{\sin\theta}$$

Uguagliando il momento della spinta con la forza peso (Fp) rispetto alla cerniera:

$$S \times d = P\cos\theta\left(y_G - \frac{h-h_s}{\sin\theta}\right)$$

Termine di sinistra

$$S \times d = \rho g A y_G \sin\theta\left(\frac{I_0}{y_G A} + \frac{h_s}{2\sin\theta}\right) = \rho g \sin\theta I_0 + \rho g A y_G \frac{h_s}{2} = \rho g I_0 \sin\theta + \rho g A \frac{h_s}{2\sin\theta}\left(h - \frac{h_s}{2}\right)$$

Termine di destra

$$P\cos\theta\left(y_G-\frac{h-h_s}{\sin\theta}\right)=P\cos\theta\left(\left(h-\frac{h_s}{2}\right)\frac{1}{\sin\theta}-\frac{h-h_s}{\sin\theta}\right)=P\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{h_s}{2}=P\frac{h_s}{2}$$ (essendo θ = 45°)

Uguagliando i due termini

$$\rho g I_0\sin\theta+\rho g A\frac{h_s}{2\sin\theta}\left(h-\frac{h_s}{2}\right)=P\frac{h_s}{2}$$

Da cui:

$$\rho g A\frac{h_s}{2\sin\theta}\left(h-\frac{h_s}{2}\right)=P\frac{h_s}{2}-\rho g I_0\sin\theta$$

Risolvendo rispetto a h

$$h=\frac{h_s}{2}+\frac{P\frac{h_s}{2}-\rho g I_0\sin\theta}{\rho g A\frac{h_s}{2\sin\theta}}=0.525m$$

Dato h = 0.73 si può applicare l'equazione di continuità tra l'ingresso (sezione 1) e la sezione contratta (sezione c), essendo $h_c = C_c\, h_s$ l'altezza della sezione contratta

$$v_1\times a\times b=v_c\times h_c\times b$$ Da cui: $$v_1=\frac{v_c\times h_c}{a}$$

Applicando poi Bernoulli tra le stesse due sezioni:

$$h_1+\frac{v_1^2}{2g}=h_c+\frac{v_c^2}{2g}$$

Sostituendo la velocità a v_1 quanto ottenuto in precedenza:

$$h_1+\frac{1}{2g}\left(\frac{v_c h_c}{a}\right)^2=h_c+\frac{v_c^2}{2g}$$ rielaborando: $$\frac{v_c^2}{2g}\left(1-\frac{h_c^2}{a^2}\right)=h_1-h_c$$

Da cui si può ottenere v_c

$$v_c=\sqrt{\frac{2g\left(h_1-h_c\right)}{1-\frac{h_c^2}{a^2}}}=2.63\frac{m}{s}$$

La portata è quindi pari a :

$$Q=v_c h_c b=0.964\frac{m^3}{s}$$

Esercizio 2 – Collegamento di due serbatoi

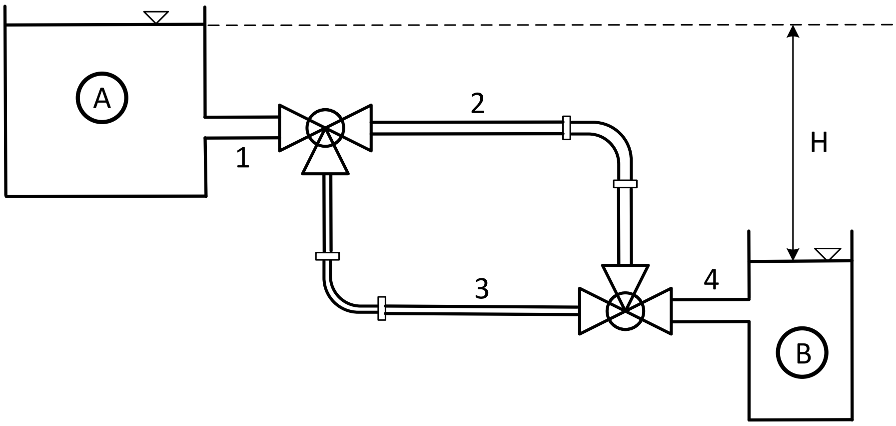
Due serbatoi contenenti glicole etilenico ($\rho = 1110$ kg/m^3, $\mu =$ 1.61E-02 $Pa \cdot s$) sono collegati secondo la configurazione riportata in figura. In particolare, si evidenziano:

- due tratti di tubazione in parallelo (2-3) di lunghezza L = 100 m e diametro D_2 = 4 cm e D_3=2.5 cm;
- tratti 1 e 4 di lunghezza pari a L_1 = 75 m e L_4= 90 m e diametro D= 5 cm.

Determinare:

- La portata circolante nel sistema tale per cui il dislivello H è pari a 4.5 m.
- Il dislivello che si avrebbe qualora il tratto 3 venisse completamente ostruito.

Nei calcoli si trascuri il contributo delle perdite di carico concentrate



Moto nelle tubazioni lisce	
$f = \dfrac{16}{Re_D}$ $\quad Re_D \leq 2300$ moto laminare	$f = \dfrac{0.079}{Re_D^{0.25}}$ $\quad Re_D > 10000$ moto turbolento

Soluzione

$$\begin{cases} H = \left(\dfrac{\Delta p}{\gamma}\right)_1 + \left(\dfrac{\Delta p}{\gamma}\right)_2 + \left(\dfrac{\Delta p}{\gamma}\right)_4 \\ H = \left(\dfrac{\Delta p}{\gamma}\right)_1 + \left(\dfrac{\Delta p}{\gamma}\right)_3 + \left(\dfrac{\Delta p}{\gamma}\right)_4 \end{cases} \tag{0.1}$$

Le perdite di carico in generale vengono valutate con la seguente espressione:

$$\left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right) = 4f\,\frac{v^2}{2gD}L = 32f\,\frac{Q^2}{\pi^2 g D^5}L \tag{0.2}$$

Per i tratti 1-4 i diametri sono uguali, quindi anche le velocità. Il fattore di attrito f che sarà funzione della velocità e del diametro (vista la dipendenza da Reynolds) sarà uguale in questi due tratti. A priori non si conosce il regime di moto. Si ipotizza, in prima istanza, un moto laminare. Questa ipotesi dovrà essere poi verificata a valle dei calcoli.

Hp: MOTO LAMINARE

$$f = \frac{16}{\text{Re}}; \beta = 128\frac{\mu}{\rho g \pi}$$
$$\left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)_1 + \left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)_4 = \beta\frac{Q}{D^4}\left(L_1 + L_4\right) \tag{0.3}$$

Dalla [1.1] si evince che le perdite di carico nel tratto 2-3 devono necessariamente essere uguali tra loro. Imponendo questo vincolo si ottiene che:

$$\left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)_2 = \left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)_3$$
$$\cancel{32} f_2 \frac{Q_2^{\ 2}}{\cancel{\pi^2 g} D_2^{\ 5}} L_2 = \cancel{32} f_3 \frac{Q_3^{\ 2}}{\cancel{\pi^2 g} D_3^{\ 5}} L_3 \tag{0.4}$$
$$f_2 \frac{Q_2^{\ 2}}{D_2^{\ 5}} L_2 = f_3 \frac{Q_3^{\ 2}}{D_3^{\ 5}} L_3$$

Ipotizzando ancora una volta il moto laminare e sapendo che i tratti 2-3 hanno uguale lunghezza si ottiene che:

$$f = \frac{16}{\text{Re}} = 16\frac{\mu}{\rho v D} = 16\frac{\mu\pi D^{\cancel{2}}}{\rho 4 Q \cancel{D}} = 4\frac{\mu\pi D}{\rho Q}$$
$$\cancel{4}\frac{\cancel{\mu\pi}\cancel{D_2}}{\cancel{\rho}\cancel{Q_2}}\frac{Q_2^{\ \cancel{2}}}{D_2^{\ \cancel{5}4}}\cancel{L_2} = \cancel{4}\frac{\cancel{\mu\pi}\cancel{D_3}}{\cancel{\rho}\cancel{Q_3}}\frac{Q_3^{\ \cancel{2}}}{D_3^{\ \cancel{5}4}}\cancel{L_3} \tag{0.5}$$
$$\frac{Q_2}{D_2^4} = \frac{Q_3}{D_3^4}$$

A questo punto imponendo il vincolo di continuità delle portate si ottiene la seguente relazione:

$$Q = Q_2 + Q_3$$
$$Q = Q_3\left[1 + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^4\right] \tag{0.6}$$

Sulla base della [1.1] possiamo scrivere la relazione finale:

$$H = \beta \frac{Q}{D^4}\left(L_1 + L_4\right) + \beta \frac{Q_3}{D_3^{\ 4}} L_3$$
$$H = \beta \frac{Q}{D^4}\left(L_1 + L_4\right) + \beta \frac{Q}{\left[1+\left(\frac{D_2}{D_3}\right)^4\right] D_3^{\ 4}} L_3$$
$$H = Q\left(\beta \frac{\left(L_1 + L_4\right)}{D^4} + \beta \frac{L_3}{\left[1+\left(\frac{D_2}{D_3}\right)^4\right] D_3^{\ 4}}\right)$$
$$Q = \frac{H}{\beta \frac{\left(L_1 + L_4\right)}{D^4} + \beta \frac{L_3}{\left[1+\left(\frac{D_2}{D_3}\right)^4\right] D_3^{\ 4}}} \tag{0.7}$$

Risultati:

tratto	*Q[m3/s]*	*v[m/s]*	*Re*
1	0.00076	0.60445	1667
2	0.00066	0.52443	1446
3	0.00010	0.20485	353
4	0.00076	0.60445	1667

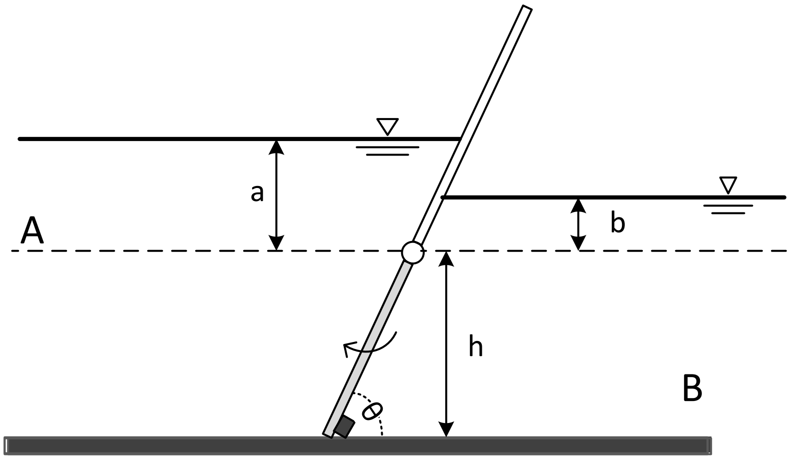
Nel punto 2 la formula risolutiva diventa:

$H = Q\left(\beta \frac{\left(L_1 + L_4\right)}{D^4} + \beta \frac{L_3}{D_2^{\ 4}}\right)$=4.74 m

Meccanica dei Fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica
Prova in Itinere – Tema B
27 Novembre 2015

Esercizio 1 – Portelli di separazione tra due serbatoi

Si immagini di avere due serbatoi, contenenti due fluidi A e B (*ρA=800 kg/m3* e *ρB=1000 kg/m3*), aventi una parete di separazione in comune, secondo quanto disegnato in figura. Sulla parete è presente un portello a sezione rettangolare la cui rotazione verso il fluido B è bloccata. Si determini quale deve essere la minima altezza b per consentire l'apertura del portello (ovvero la sua rotazione verso il fluido A).
Si assuma *a=6 m*, h = 4.5m, θ = 30°



Soluzione

Iniziamo a determinare la spinta agente sulla parete da parte del fluido A.

<u>*Fluido A*</u>

$$S_1 = \gamma_1 \left(a + \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h}{\sin\theta} \right) l \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} y_C &= y_G + \frac{I_0}{M} \\ y_G &= \left(\frac{a}{\sin\theta} \right) + \left(\frac{h}{2\sin\theta} \right); I_0 = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{\sin\theta} \right)^3 l; M = \left[\left(\frac{a}{\sin\theta} \right) + \left(\frac{h}{2\sin\theta} \right) \right] \left(\frac{h}{\sin\theta} \right) l \\ y_C &= \frac{2}{3} \frac{\left(3a^2 + 3ah + h^2 \right)}{\left(2a + h \right)\sin\theta} \end{aligned} \tag{2.2}$$

A questo punto è necessario andare a calcolare il braccio di questa spinta.

$$b_1 = y_c - \left(\frac{a}{sen\theta} \right)$$
$$b_1 = \frac{3ah + 2h^2}{3(2a+h)\sin\theta} \tag{2.3}$$

Il momento rispetto alla cerniera del portello è pari a :

$$M_1 = S_1 b_1 = \gamma_1 \left(\frac{\cancel{2a+h}}{2} \right) \left(\frac{h}{\sin\theta} \right) l \frac{3ah + 2h^2}{3\cancel{(2a+h)}\sin\theta} = \frac{\gamma_1 l h^2 (2h+3a)}{6(\sin\theta)^2} \tag{2.4}$$

Fluido B

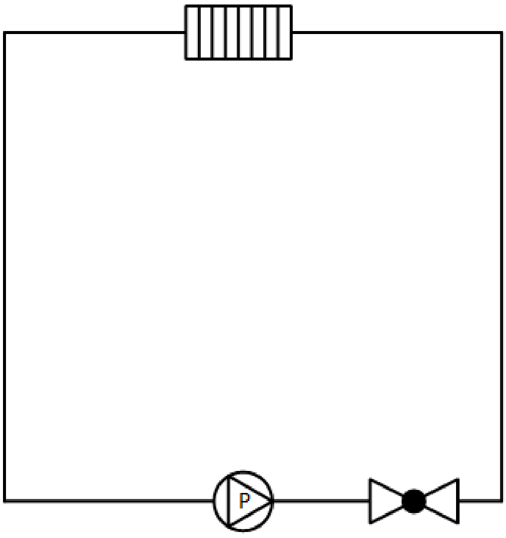
Per il fluido B il momento avrà la stessa espressione, a patto di sostituire “a” con “b”

$$M_2 = \frac{\gamma_2 l h^2 (2h+3b)}{6(\sin\theta)^2} \tag{2.5}$$

A questo punto per far si che il portello si muova nella direzione del fluido A:

$$M_2 > M_1$$
$$\frac{\gamma_2 \cancel{lh^2} (2h+3b)}{\cancel{6(\sin\theta)^2}} > \frac{\gamma_1 \cancel{lh^2} (2h+3a)}{\cancel{6(\sin\theta)^2}}$$
$$b > \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(\frac{2h+3a}{3} \right) - \frac{2}{3} h \tag{2.6}$$
$$b > 4.2m$$

Esercizio 2 - Impianto circolazione



Un impianto di circolazione di acqua per riscaldamento urbano ($\rho = 980$ kg/m^3, $\mu =$ 4.3E-04 $Pa \cdot s$) è rappresentato in Figura. Il tratto verticale misura 10 m, mentre quello orizzontale 20m. La velocità dell'acqua ha un valore massimo pari a 0.8 m/s, per ragioni di rumorosità. Per contenere i costi, la pompa dell'impianto (con un rendimento del 80%) può assorbire una potenza massima di 5 W. La tubazione da utilizzare ha una rugosità di 10 µm. Determinare il diametro della tubazione. Si assumano i seguenti valori del coefficiente di perdita concentrata: K = 2 per la valvola e K = 3 per il termosifone e K = 0.5 per la curva.
Si assuma un coefficiente di attrito di primo tentativo pari a 0.01.
Per la stima del fattore di attrito si utilizzi la relazione semplificata di Haaland: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -3.6 \log_{10}\left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{1}{3.7}\frac{\varepsilon_s}{D}\right)^{1.11}\right]$

Soluzione

$$P_p = P_{ass}\eta = 5 \times 0.8 = 4W$$

$P_p = \dot{m}g\left(h_d + h_c\right)$ P_p = potenza pompa; h_c = perdite concentrate; h_d = perdite distribuite

$$h_c = \frac{v^2}{2g}\left(4K_C + K_T + K_P\right) = 0.23m$$

$$h_d = \frac{P_p}{\dot{m}g} - h_c = \frac{4P_p}{\rho v \pi D^2 g} - h_c$$

$$h_d = JL = 2f\frac{L}{D}\frac{v^2}{g}$$

Sostituendo le perdite distribuite come ottenute dalla relazione con la potenza della pompa:

$$\frac{4P_p}{\rho v \pi D^2 g} - h_c = 2f\frac{L}{D}\frac{v^2}{g}$$

f dipende da D. Occorre quindi una procedura iterativa. Si assume f = 0.01, quindi è possibile ricavare D dalla soluzione dell'equazione di 2° grado:

$$4P_p - h_c \rho v \pi D^2 g = 2fL\rho v \pi D v^2$$

Da quest'equazione si ottengono due valori del diametro: D_1 = 0.008 e D_2 = -0.265, di cui solo il primo è accettabile.

Con questo valore di D è possibile ricalcolare il fattore di attrito:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = 15059$$

Utilizzando per semplicità la formula di Haaland,

$\frac{1}{\sqrt{f}} = -3.6\log_{10}\left[\frac{6.9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{1}{3.7}\frac{\varepsilon_s}{D}\right)^{1.11}\right]$ si ottiene : f = 0.008.

Con questo nuovo valore di f si ricalcola il diametro, le cui nuove soluzioni sono: D_1 = 0.011 e D_2 = -5.568.

Questo è il valore di convergenza.