# Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 7 (FIC) – 28 Gennaio 2016

# Scambio di materia e di calore

**Esercizio 1. Evaporazione di acqua da una piscina riscaldata**

Si consideri una piscina di forma rettangolare con lati di lunghezze pari a $L_1$*=5 m* e $L_2$*=3 m*. La piscina è a contatto con l'aria dell'ambiente esterno che si trova alla temperatura di $T_{aria}$*=25°C* e che presenta un tasso di umidità relativa $\varphi$ pari al *52%*. Si vuol mantenere la temperatura dell'acqua della piscina al valore costante e uniforme di $T_{H2O}$*=50°C* e a tale scopo si utilizza una resistenza elettrica in grado di fornire la potenza termica necessaria in modo tale da evitare il raffreddamento dell'acqua. Grazie ad un opportuno sistema di agitazione la temperatura dell'acqua può sempre essere considerata perfettamente uniforme. La superficie superiore della piscina è poi soggetta all'irraggiamento solare che fornisce un flusso termico costante e pari a $Q_{rad}$*=300 W/m²*.

Si chiede di determinare quale deve essere la potenza fornita dalla resistenza elettrica per mantenere la temperatura dell'acqua la valore costante richiesto. Si tenga conto dei contributi termici dovuti alla radiazione, alla convezione naturale e all'evaporazione.

| **Proprietà dell'aria** | | | |
|---|---|---|---|
| Conducibilità termica | 0.026 W/m/K | Calore di evaporazione di $H_2O$ | 2380 kJ/kg |
| Numero di Pr | 0.72 | Tensione di vapore a 25°C | 3.17 kPa |
| Diffusività termica | $2.5\cdot10^{-5}$ m²/s | Tensione di vapore a 50°C | 12.35 kPa |
| Viscosità cinematica | $1.67\cdot10^{-5}$ m²/s | Diffusività $H_2O$ in aria | $3\cdot10^{-5}$ m²/s |

Per la stima dei coefficienti di scambio termico e materiale si utilizzino le seguenti correlazioni:

$$Nu = 0.15\left(Gr_{L_C}\,\mathrm{Pr}\right)^{1/3} \qquad Sh = 0.15\left(Gr_{L_C}\,Sc\right)^{1/3}$$

dove Gr è definito sulla differenza di densità parziale del vapor d'acqua (tra la superficie della piscina e l'aria dell'ambiente):

$$Gr_{L_C} = \frac{gL_C^3\cdot\Delta\rho_{vap}}{\rho_{aria}\upsilon_{aria}^2}$$

In particolare la lunghezza caratteristica Lc da utilizzare per la costruzione del numero di Gr sia definita come il rapporto tra la superficie della piscina e il perimetro della stessa.

**Esercizio 2. Evaporazione di acqua da una maglia stesa ad asciugare**

Si consideri una maglia bagnata stesa ad asciugare in aria alla temperatura di $T_{aria}$*=25°C* e un tasso di umidità relativa $\varphi$ pari al *52%*. Si immagini che l'aria sia in movimento alla velocità *v=5 m/s* a causa dell'azione del vento.

Si chiede di determinare: a) la temperatura a cui si porta la maglia immaginando che il calore necessario per l'evaporazione sia tutto e solo quello fornito dalla convezione forzata; b) il flusso di acqua evaporante nelle condizioni assegnate.

Si stimi il numero di *Nu* (da utilizzare per il coefficiente di scambio termico *h*) con la seguente correlazione:

$$Nu = 0.15\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

dove la lunghezza caratteristica da utilizzare per la costruzione del numero di Reynolds è pari a *L=40 cm*. Per il calcolo del coefficiente di scambio di materia $h_m$ si tenga conto della seguente analogia (di Colburn):

$$h_m = \frac{h}{\rho C_P\left(\dfrac{\alpha}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}}$$

| **Proprietà dell'aria** | | | |
|---|---|---|---|
| Conducibilità termica | 0.026 W/m/K | Calore di evaporazione di $H_2O$ | 2380 kJ/kg |
| Numero di Pr | 0.72 | Tensione di vapore dell'acqua | 3.17 kPa |
| Diffusività termica | $2.5\cdot10^{-5}$ m²/s | Diffusività $H_2O$ in aria | $3\cdot10^{-5}$ m²/s |
| Viscosità cinematica | $1.67\cdot10^{-5}$ m²/s | | |
| Calore specifico | 1000 J/kg/K | | |

**Esercizio 3 – Bolla di cloro in acqua (Teoria della penetrazione)**
Una bolla di cloro del diametro di *0.02 m* risale in una colonna contenente acqua in condizioni di equilibrio termico con la bolla stessa e ad una temperatura di *15 °C*. Si valuti la variazione del quantitativo di cloro dopo una risalita della bolla pari ad *1 m* di colonna: ipotizzando velocità di risalita costante. Si ipotizzi una pressione pari a quella atmosferica.

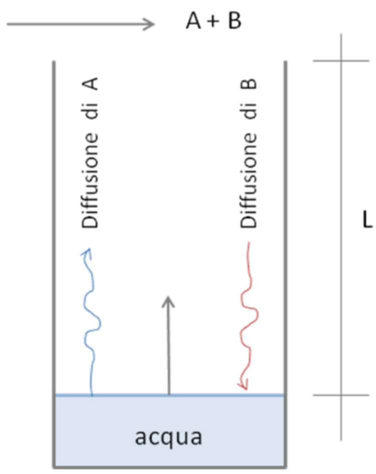
| | |
|---|---|
| $D_{Cl2/H2O}$ | $1.26x10^{-9}\ m^2/s$ |
| *Solubilità* $Cl_2$ *in Acqua* | *0.823 g di* $Cl_2$ *per 100 g di* $H_2O$ |
| *PM cloro* ($Cl_2$) | *71 Kg/Kmole* |
| *Velocità di risalita* | *0.33 m/s* |

**Esercizio 4 – Bolla di anidride carbonica (Teoria della penetrazione)**
Una bolla di anidride carbonica del diametro iniziale di *0.5 cm* risale attraverso acqua distillata alla temperatura di *18°C* e pressione di *1 atm*. Il coefficiente di diffusione relativo $CO_2$-$H_2O$ è pari a $1.46\times10^{-5}\ cm^2/s$ mentre la solubilità del gas in esame in acqua *0.041 mol/l*.

a. Si chiede di calcolare il coefficiente di scambio materiale gas liquido assumendo una velocità stazionaria di risalita pari a *22 cm/sec*.
b. Si calcoli quindi il flusso molare specifico per unità di superficie della $CO_2$.
c. Si scriva infine il bilancio di massa per la $CO_2$ contenuta nella bolla, tenendo conto della variazione del diametro con il tempo.

| | |
|---|---|
| *Temperatura* | *18°C* |
| *Diametro Iniziale bolla* | *0.5 cm* |
| *Pressione Bolla* | *1 atm* |
| *Diffusività materiale relativa* | $1.46\times10^{-5}\ cm^2/s$ |

**Esercizio 5 – Misura della diffusività attraverso il tubo di Stefan**
Si vuole stimare la diffusività del vapor d'acqua (*A*) in aria (*B*) utilizzando il tubo di Stefan (si veda la figura a lato). Si consideri dunque un contenitore tubolare (base circolare di diametro *D*) di altezza pari a *L* al cui interno si trovi una certa quantità di acqua, mantenuta ad un livello costante nel tempo. Nella parte superiore del contenitore si assuma una corrente di aria con una umidità relativa di vapore d'acqua pari a *Φ*. In questo modo il vapore d'acqua che risale dal fondo del contenitore viene portato via dalla corrente e di conseguenza e' lecito assumere un valore della frazione molare di vapor d'acqua sulla sommità del contenitore coerente con il valore di umidità relativa della corrente stessa.
In 15 giorni di funzionamento dell'apparecchiatura (a temperatura e pressione costanti) la quantità di acqua evaporata è risultata pari a *1.23 g*. Si determini il coefficiente di diffusione del vapor d'acqua in aria.




| | |
|---|---|
| *diametro interno:* | *3 cm* |
| *altezza (L):* | *40 cm* |
| *pressione:* | *83.5 kPa* |
| *temperatura:* | *20°C* |
| *umidità corrente (Φ):* | *5%* |

**Esercizio 6 – Dimensionamento di una parete refrattaria**
La parete di un forno largo *L=3 m* e alto *H=10 m* deve essere rivestita con mattoni isolanti di conduttività termica *k = 0.50 W/m/K*. Sapendo che la temperatura massima della parete di mattoni dal lato del forno è di $T_1$*=400 °C*, calcolare lo spessore di mattoni per garantire una temperatura della superficie esterna pari a *100°C*. Considerare l'aria esterna a una temperatura di *30 °C* e due diverse condizioni di vento: nullo e pari a *10 m/s*.
Per questioni di costi non si vuole superare uno spessore di mattoni *s=80 cm*. Si chiede di valutare quante intercapedini d'aria dello spessore di 1 cm si debbano introdurre nella parete per consentire di non superare lo spessore limite.
Proprietà aria: viscosità $1.8\cdot10^{-5}\ Pa\cdot s$; conducibilità *0.025 W/m/K*; calore specifico *1.010 kJ/kg/K.*

$$Nu = 0.037\,\mathrm{Re}^{0.80}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad\qquad Nu = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$$

**Esercizio 7 – Riscaldamento/raffreddamento acqua**

Un recipiente metallico, chiuso e sferico del diametro *D=8 cm* e perfettamente miscelato contiene acqua alla temperatura di *25 °C*. A partire dal tempo *t=0* il recipiente viene coibentato in modo da renderlo completamento adiabatico e viene attivata una resistenza elettrica che genera una potenza termica *Q=1000 W*.

a) Dopo quanto tempo la temperatura dell'acqua raggiunge i *50 °C*?

b) Una volta raggiunta la temperatura di *50 °C*, viene rimossa la coibentatura e la resistenza elettrica viene spenta. La superficie esterna del recipiente è esposta all'aria a *T=25 °C* e il calore è rimosso con l'ausilio di un ventilatore che imprime all'aria una velocità di *10 m/s*. In quanto tempo la temperatura dell'acqua scende a *30 °C*?

Proprietà

Acqua: densità *1 g/cm*$^3$; calore specifico *4.186 kJ/kg/K*.

Aria: viscosità $1.8\cdot10^{-5}$ *Pa·s*; conducibilità *0.025 W/m/K*; calore specifico *1010 J/kg/K*

# Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 7 (FIC) - Gennaio 2015

## Scambio di materia e di calore

***Tensione di vapore dell'acqua***

$$\ln(P_{ev}) = A - \frac{B}{T + C}$$

$$A = 18.3036$$
$$B = 3816.44$$
$$C = -46.13$$

(temperatura in *K* e tensione di vapore in *mmHg*)

***Proprietà dell'aria***

| ***T(K)*** | ***Calore specifico (kJ/kg/K)*** | ***Viscosità dinamica (Pa·s) ·10<sup>7</sup>*** | ***Viscosità cinematica (m²/s) ·10⁶*** | ***Conducibilità termica (W/m/K) ·10³*** | ***Diffusività termica (m²/s)*** | **Numero di Prandtl** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| ***250*** | *1.006* | *159.6* | *11.44* | *22.3* | *15.9* | *0.720* |
| ***300*** | *1.007* | *184.6* | *15.89* | *26.3* | *22.5* | *0.707* |
| ***350*** | *1.009* | *208.2* | *20.92* | *30.0* | *29.9* | *0.700* |
| ***400*** | *1.014* | *230.1* | *26.41* | *33.8* | *38.3* | *0.690* |
| ***450*** | *1.021* | *250.7* | *32.39* | *37.3* | *47.2* | *0.686* |
| ***500*** | *1.030* | *270.1* | *38.79* | *40.7* | *56.7* | *0.684* |
| ***550*** | *1.040* | *288.4* | *45.57* | *43.9* | *66.7* | *0.683* |
| ***600*** | *1.051* | *305.8* | *52.69* | *46.9* | *76.9* | *0.685* |
| ***650*** | *1.063* | *322.5* | *60.21* | *49.7* | *87.3* | *0.690* |

**Esercizio 1 – Evaporazione di acqua da una piscina riscaldata**

Si consideri una piscina di forma rettangolare con lati di lunghezze pari a $L_1=5\ m$ e $L_2=3\ m$. La piscina è a contatto con l'aria dell'ambiente esterno che si trova alla temperatura di $T_{aria}=25°C$ e che presenta un tasso di umidità relativa $\varphi$ pari al *52%*. Si vuol mantenere la temperatura dell'acqua della piscina al valore costante e uniforme di $T_{H2O}=50°C$ e a tale scopo si utilizza una resistenza elettrica in grado di fornire la potenza termica necessaria in modo tale da evitare il raffreddamento dell'acqua. Grazie ad un opportuno sistema di agitazione la temperatura dell'acqua può sempre essere considerata perfettamente uniforme. La superficie superiore della piscina è poi soggetta all'irraggiamento solare che fornisce un flusso termico costante e pari a $Q_{rad}=300\ W/m^2$.

Si chiede di determinare quale deve essere la potenza fornita dalla resistenza elettrica per mantenere la temperatura dell'acqua la valore costante richiesto. A tale scopo si tenga conto dei contributi termici dovuti alla radiazione, alla convezione naturale e all'evaporazione.

| **Proprietà dell'aria** | | | |
|---|---|---|---|
| Conducibilità termica | 0.026 W/m/K | Calore di evaporazione di $H_2O$ | 2380 kJ/kg |
| Numero di Pr | 0.72 | Tensione di vapore a 25°C | 3.17 kPa |
| Diffusività termica | $2.5\cdot10^{-5}$ $m^2/s$ | Tensione di vapore a 50°C | 12.35 kPa |
| Viscosità cinematica | $1.67\cdot10^{-5}$ $m^2/s$ | Diffusività $H_2O$ in aria | $3\cdot10^{-5}$ $m^2/s$ |

Per la stima dei coefficienti di scambio termico e materiale si utilizzino le seguenti correlazioni:

$$Nu = 0.15\left(Gr_{L_C}\ \mathrm{Pr}\right)^{1/3} \qquad Sh = 0.15\left(Gr_{L_C}\ Sc\right)^{1/3}$$

dove il numero di Gr è definito sulla differenza di densità parziale del vapor d'acqua (ovviamente tra la superficie della piscina e l'aria dell'ambiente):

$$Gr_{L_C} = \frac{gL_C^3 \cdot \Delta\rho_{vap}}{\rho_{aria}\upsilon_{aria}^2}$$

In particolare la lunghezza caratteristica Lc da utilizzare per la costruzione del numero di Gr sia definita come il rapporto tra la superficie della piscina e il perimetro della stessa.

**Soluzione**

*a) Contributo dalla convezione forzata.*

Stimiamo prima di tutto le densità parziali del vapore d'acqua sulla superficie ($\rho_{sup}$) della piscina e nel bulk ($\rho_{bulk}$) utilizzando i dati del problema:

$$\rho_{\sup} = \frac{P_v(50°C)PM_{H2O}}{RT_{H2O}} \qquad \rho_{bulk} = \phi\frac{P_v(25°C)PM_{H2O}}{RT_{air}} \tag{1}$$

Andiamo quindi a valutare il numero di Grashof utilizzando la definizione suggerita nel testo:

$$Gr_{L_C} = \frac{gL_C^3 \cdot \left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right)}{\rho_{aria}\upsilon_{aria}^2} \tag{2}$$

Da qui stimiamo il numero di Nusselt e quindi il coefficiente di scambio convettivo:

$$Nu = 0.15\left(Gr_{L_C}\ \mathrm{Pr}\right)^{1/3} \tag{3}$$

$$h_{conv} = \frac{Nuk_{aria}}{L_C} \tag{4}$$

Di conseguenza la potenza scambiata per convezione è data dalla seguente espressione:

$$Q_{conv} = h_{conv}A_{piscina}\Delta T = h_{conv}L_1L_2\left(T_{H2O} - T_{aria}\right) \tag{5}$$

*b) Contributo dall'evaporazione.*
La potenza ceduta a causa dell'evaporazione richiede la stima della portata di acqua evaporante ed è pari a:

$$Q_{ev} = \dot{m}_{ev} \Delta H_{ev} \qquad (6)$$

Per stimare la portata di acqua evaporante dobbiamo avere a disposizione il coefficiente di scambio di materia:

$$Sh = 0.15\left(Gr_{L_C} Sc\right)^{1/3} \qquad (7)$$

$$h_m = \frac{Sh \Gamma_{H2O/aria}}{L_C} \qquad (8)$$

dove il numero di Grashof è lo stesso calcolato per lo scambio termico e il numero di Sc si valuta con i dati del problema.
Quindi la portata di acqua evaporante risulta:

$$\dot{m}_{ev} = h_m L_1 L_2 \left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right) \qquad (9)$$

*c) Valutazione della potenza termica della resistenza*
La potenza termica che la resistenza dovrà garantire sarà dunque:

$$Q_{res} = Q_{ev} + Q_{conv} - Q_{rad} \qquad (10)$$

**Esercizio 2 – Evaporazione di acqua da una maglia stesa ad asciugare**

Si consideri una maglia bagnata stesa ad asciugare in aria alla temperatura di $T_{aria}=25°C$ e un tasso di umidità relativa $\varphi$ pari al *52%*. Si immagini che l'aria sia in movimento alla velocità $v=5\ m/s$ a causa dell'azione del vento.

Si chiede di determinare: a) la temperatura a cui si porta la maglia immaginando che il calore necessario per l'evaporazione sia tutto e solo quello fornito dalla convezione forzata; b) il flusso di acqua evaporante nelle condizioni assegnate.

Si stimi il numero di *Nu* (da utilizzare per il coefficiente di scambio termico *h*) con la seguente correlazione:

$$Nu = 0.15\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

dove la lunghezza caratteristica da utilizzare per la costruzione del numero di Reynolds è pari a $L=40\ cm$. Per il calcolo del coefficiente di scambio di materia $h_m$ si tenga conto della seguente analogia (di Colburn):

$$h_m = \frac{h}{\rho C_P \left(\dfrac{\alpha}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}}$$

| **Proprietà dell'aria** | | | |
|---|---|---|---|
| Conducibilità termica | 0.026 W/m/K | Calore di evaporazione di $H_2O$ | 2380 kJ/kg |
| Numero di Pr | 0.72 | Tensione di vapore dell'acqua | 3.17 kPa |
| Diffusività termica | $2.5\cdot10^{-5}$ $m^2/s$ | Diffusività $H_2O$ in aria | $3\cdot10^{-5}$ $m^2/s$ |
| Viscosità cinematica | $1.67\cdot10^{-5}$ $m^2/s$ | | |
| Calore specifico | 1000 J/kg/K | | |

**Soluzione**

Dal momento che tutta la potenza termica assorbita dalla maglia per convezione vien utilizzata per il processo di evaporazione, possiamo scrivere:

$$hA\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) = \dot{m}_{ev} A \Delta H_{ev} \tag{11}$$

a) Questa eguaglianza di potenze può essere utilizzata per trovare la temperatura a cui si porta la maglia. Infatti:

$$hA\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) = h_m\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right) A \Delta H_{ev} \tag{12}$$

$$h\left(T_{aria} - T_{maglia}\right) = \frac{h}{\rho_{aria} C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}}\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right)\Delta H_{ev} \tag{13}$$

$$T_{maglia} = T_{aria} - \frac{\left(\rho_{\sup} - \rho_{bulk}\right)\Delta H_{ev}}{\rho_{aria} C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}} = T_{aria} - \frac{\rho_{\sup} - \rho_{bulk}}{\rho_{aria}}\,\frac{\Delta H_{ev}}{C_{P,aria}\left(\dfrac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}}\right)^{2/3}} \tag{14}$$

b) Il flusso di acqua evaporante può quindi essere stimata dopo aver calcolato il coefficiente di scambio termico:

$$Nu = 0.15\,\mathrm{Re}_L^{0.5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{15}$$

$$h = \frac{Nu \cdot k_{aria}}{L} \tag{16}$$

$$h_m = \frac{h}{\rho_{aria} C_{P,aria} \left( \frac{\alpha_{aria}}{\Gamma_{H_2O/air}} \right)^{2/3}} \tag{17}$$

$$\frac{\dot{m}_{ev}}{A} = j = h_m \left( \rho_{\sup} - \rho_{bulk} \right) \tag{18}$$

**Esercizio 3 – Bolla di cloro in acqua**

Una bolla di cloro del diametro di *0.02 m* risale in una colonna contenente acqua in condizioni di equilibrio termico con la bolla stessa e ad una temperatura di *15 °C*. Si valuti la variazione del quantitativo di cloro dopo una risalita della bolla pari ad *1 m* di colonna: ipotizzando velocità di risalita costante.

| | |
|---|---|
| $D_{Cl2/H2O}$ | $1.26 \times 10^{-9}\ m^2/s$ |
| *P* | *1 atm* |
| *Solubilità* $Cl_2$ *in Acqua* | *0.823 g di* $Cl_2$ *per 100 g di* $H_2O$ |
| *PM cloro* ($Cl_2$) | *71 Kg/Kmole* |
| *Velocità di risalita* | *0.33 m/s* |

**Soluzione**

In queste particolari condizioni il coefficiente di scambio materiale risulta essere pari a:

$$h_m = 1.12\sqrt{\frac{v_b D_{AB}}{D_b}} = 1.615 \times 10^{-4}\ \frac{m}{s}$$

Si scrive il bilancio materiale nella forma più generale possibile:

$$\frac{dM_{Cl_2}}{dt} = -h_m \cdot A_b \cdot \rho_{Cl_2-H_2O}$$

$$\begin{cases} dM_{Cl_2} = \frac{1}{2}\rho\pi D_b^{\ 2} dD_b \\ dz = v_b dt \end{cases}$$

$$\rho_b = \frac{P}{RT} \cdot \overline{PM_{Cl_2}} = 3\frac{kg}{m^3}$$

$$\frac{dD_b}{dz} = -\frac{2h_m \cdot \rho_{Cl_2-H_2O}}{\rho_b v_b}$$

Quindi la variazione di dimensione della bolla:

$$D_b = D_b^{\ 0} - \frac{2h_m \cdot \rho_{Cl_2-H_2O}}{\rho_b v_b} \cdot L = 0.0173m$$

**Esercizio 4 – Bolla di anidride carbonica**

Una bolla di anidride carbonica del diametro iniziale di *0.5 cm* risale attraverso acqua distillata alla temperatura di *18°C* e pressione di *1 atm*. Il coefficiente di diffusione relativo $CO_2$-$H_2O$ è pari a $1.46\times10^{-5}$ $cm^2/s$ mentre la solubilità del gas in esame in acqua *0.041 mol/l*.

d. Si chiede di calcolare il coefficiente di scambio materiale gas liquido assumendo una velocità stazionaria di risalita pari a *22 cm/sec*.
e. Si calcoli quindi il flusso molare specifico per unità di superficie della $CO_2$.
f. Si scriva infine il bilancio di massa per la $CO_2$ contenuta nella bolla, tenendo conto della variazione del diametro con il tempo.

| | |
|---|---|
| *Temperatura* | *18°C* |
| *Diametro Iniziale bolla* | *0.5 cm* |
| *Pressione Bolla* | *1 atm* |
| *Diffusività materiale relativa* | $1.46\times10^{-5}$ $cm^2/s$ |

**Soluzione**

In queste particolari condizioni il coefficiente di scambio materiale risulta essere pari a:

$$h_m = 1.12\sqrt{\frac{v_b D_{AB}}{D_b}} = 2.838\times10^{-4}\ \frac{m}{s}$$

Il flusso molare di CO2 verso la fase liquida:

$$N = h_m \Delta C = 1.1638\times10^{-2}\ \frac{mol}{m^2\cdot s}$$

Il bilancio materiale in termini di variazione di diametro diventa:

$$\frac{dM_{CO_2}}{dt} = -1.12\sqrt{\frac{v_b D_{AB}}{D_b}}\cdot \pi D_b^{\ 2}\cdot \rho_{CO_2-H_2O}$$

Effettuando l’ultima sostituzione di variabile:

$$\frac{dD_b}{dz} = -\frac{2\cdot 1.12\sqrt{\frac{v_b D_{AB}}{D_b}}\cdot \rho_{CO_2-H_2O}}{\rho_b v_b}$$

**Esercizio 5 – Misura della diffusività attraverso il tubo di Stefan**

Si vuole stimare la diffusività del vapor d'acqua (*A*) in aria (*B*) utilizzando il tubo di Stefan (si veda la figura a lato). Si consideri dunque un contenitore tubolare (base circolare di diametro *D*) di altezza pari a *L* al cui interno si trovi una certa quantità di acqua, mantenuta ad un livello costante nel tempo. Nella parte superiore del contenitore si assuma una corrente di aria con una umidità relativa di vapore d'acqua pari a *Φ*. In questo modo il vapore d'acqua che risale dal fondo del contenitore viene portato via dalla corrente e di conseguenza e' lecito assumere un valore della frazione molare di vapor d'acqua sulla sommità del contenitore coerente con il valore di umidità relativa della corrente stessa.

In quindici giorni di funzionamento dell'apparecchiatura (a temperatura e pressione costanti) la quantità di acqua evaporata e' risultata pari a *1.23 g*. Si determini il coefficiente di diffusione del vapor d'acqua in aria.

| | |
|---|---|
| *diametro interno:* | *3 cm* |
| *altezza (L):* | *40 cm* |
| *pressione:* | *83.5 kPa* |
| *temperatura:* | *20°C* |
| *umidità corrente (Φ):* | *5%* |

**Soluzione completa**

Con il pedice A si indica il vapor d'acqua; con il pedice B l'aria. Il flusso molare di vapor d'acqua in condizioni stazionarie deve essere costante (A e' la sezione di passaggio).

$$J_A = \frac{\dot{n}_A}{A} = cst$$

Il flusso molare di B deve invece essere nullo, perché altrimenti si avrebbe accumulo di aria (a meno che questa non venga assorbita nella fase liquida, cosa che escludiamo):

$$J_B = \frac{\dot{n}_B}{A} = 0$$

Il flusso molare di A e' dato dalla somma del contributo diffusive e di quello convettivo (yA rappresenta la frazione molare di A):

$$J_A = \frac{\dot{n}_A}{A} = J_A^{conv} + J_A^{diff} = y_A\left(J_A + J_B\right) - \Gamma\frac{dC_A}{dx}$$

$$J_A = y_A\left(J_A + J_B\right) - \Gamma C_{tot}\frac{dy_A}{dx}$$

Nell'espressione sopra riportata con x si intende la coordinate spaziale misurata lungo l'asse del contenitore a partire dal pelo libero dell'acqua fino al bordo superiore (x=L).

Sfruttando il fatto che il flusso molare di B deve essere nullo si ha:

$$J_A = y_A J_A - \Gamma C_{tot}\frac{dy_A}{dx}$$

$$J_A = -\frac{\Gamma C_{tot}}{1 - y_A}\frac{dy_A}{dx}$$

E' possibile risolvere l'equazione sopra riportata attraverso la separazione delle variabili:

$$-\frac{1}{1-y_A}\frac{dy_A}{dx}=\frac{J_A}{\Gamma C_{tot}}=cst$$

$$-\int_0^{y_{A,L}}\frac{1}{1-y_A}dy_A=\int_0^L\frac{J_A}{\Gamma C_{tot}}dx$$

$$\ln\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}=\frac{J_A}{\Gamma C_{tot}}L$$

Abbiamo quindi l'espressione del flusso totale di acqua:

$$J_A=\frac{\Gamma C_{tot}}{L}\ln\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}$$

Attraverso il flusso molare possiamo determinare la diffusività. Basta sfruttare l'informazione relativa alla massa di acqua evaporata ($m_A$) nell'arco di tempo $\Delta$t:

$$m_A=J_A PM_A A\cdot\Delta t=\frac{\Gamma C_{tot}}{L}\ln\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}PM_A A\cdot\Delta t$$

$$\Gamma=\frac{m_A}{\frac{C_{tot}}{L}\ln\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}PM_A A\cdot\Delta t}$$

E' possibile anche determinare il profilo di frazione molare di vapor d'acqua lungo tutto il contenitore:

$$\ln\frac{1-y_A}{1-y_{A,0}}=\frac{J_A}{\Gamma C_{tot}}x$$

$$\frac{1-y_A}{1-y_{A,0}}=\left[\frac{1-y_{A,L}}{1-y_{A,0}}\right]^{x/L}$$

**Esercizio 6 - Spessore refrattario**

La parete di un forno largo *L=3 m* e alto *H=10 m* deve essere rivestita con mattoni isolanti di conduttività termica *k = 0.50 W/m/K*. Sapendo che la temperatura massima della parete di mattoni dal lato del forno è di $T_1$*=400 °C*, calcolare lo spessore di mattoni per garantire una temperatura della superficie esterna pari a *100°C*. Considerare l'aria esterna a una temperatura di *30 °C* e due diverse condizioni di vento: nullo e pari a *10 m/s*.

Per questioni di costi non si vuole superare uno spessore di mattoni *s=80 cm*. Si chiede di valutare quante intercapedini d'aria dello spessore di 1 cm si debbano introdurre nella parete per consentire di non superare lo spessore limite.

Proprietà aria: viscosità $1.8\cdot10^{-5}$ *Pa·s*; conducibilità *0.025 W/m/K*; calore specifico *1.010 kJ/kg/K.*

Correlazioni:

$$Nu = 0.037\,\mathrm{Re}^{0.80}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad\qquad Nu = \left\{0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$$

**Soluzione:**

Lo spessore si trova dall'eguaglianza dei flussi (ovvero delle potenze) termiche:

$$\dot{Q} = \frac{k}{s}\left(T_{p1} - T_{p2}\right) = h\left(T_{p2} - T_A\right) \tag{19}$$

$$s = \frac{k_{mat}\left(T_{p1} - T_{p2}\right)}{h_{est}\left(T_{p2} - T_A\right)} \tag{20}$$

Il coefficiente di scambio termico si trova ovviamente con le correlazioni proposte nel testo. In un caso dovrà essere considerata la convezione forzata; nell'altro quella naturale.

a. Convezione forzata (v=10 m/s)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{aria}\mathrm{vL}}{\mu_{aria}} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_{aria}\mathrm{c}_{\mathrm{p,aria}}}{\mathrm{k}_{\mathrm{aria}}} \tag{21}$$

$$Nu = 0.037\,\mathrm{Re}^{0.80}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{22}$$

$$h_{forz} = \frac{Nuk_{aria}}{L} \tag{23}$$

b. Convezione naturale

$$\mathrm{Gr} = \frac{\rho^2 \mathrm{g}\beta\left(T_{p2} - T_A\right)H^3}{\mu^2} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu_{aria}\mathrm{c}_{\mathrm{p,aria}}}{\mathrm{k}_{\mathrm{aria}}} \tag{24}$$

$$Nu_{nat} = \left\{ 0.825 + \frac{0.387\left(Gr\,\mathrm{Pr}\right)^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2 \tag{25}$$

$$h_{nat} = \frac{Nuk_{aria}}{L} \tag{26}$$

Con i dati proposti nel testo in entrambi i casi si ottiene uno spessore minore di quello massimo accettabile. Nel caso generale, se si volesse individuare il numero di intercapedini necessarie, sarebbe sufficiente considerare le corrispondenza resistenze in serie:

$$\mathrm{U}_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{h}_{est}} + \frac{\mathrm{s}_{mat}}{k_{mat}} + \frac{\mathrm{ns}_{aria}}{k_{aria}}} = \frac{\mathrm{h}_{est}k_{aria}k_{mat}}{k_{aria}k_{mat} + \mathrm{s_s}\mathrm{h}_{est}k_{aria} + \mathrm{ns}_{aria}\mathrm{h}k_{mat}} \tag{27}$$

Andando a eguagliare le potenze:

$$\mathrm{U}_{tot}\mathrm{A}\left(\mathrm{T_{p1}} - \mathrm{T_A}\right) = \mathrm{h}_{est}\mathrm{A}\left(\mathrm{T_{p2}} - \mathrm{T_A}\right) \tag{28}$$

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{K_A K_s}\left(\mathrm{T_{p1}} - \mathrm{T_A}\right) - \left(\mathrm{T_{p2}} - \mathrm{T_A}\right)\left(\mathrm{K_A K_s} + \mathrm{s_s h K_A}\right)}{\left(\mathrm{T_{p2}} - \mathrm{T_A}\right)\mathrm{s_A h K_s}} \tag{29}$$

**Esercizio 7 - Riscaldamento/raffreddamento acqua**

Un recipiente metallico, chiuso e sferico del diametro *D=8 cm* e perfettamente miscelato contiene acqua alla temperatura di *25 °C*. A partire dal tempo *t=0* il recipiente viene coibentato in modo da renderlo completamento adiabatico e viene attivata una resistenza elettrica che genera una potenza termica *Q=1000 W*.

a) Dopo quanto tempo la temperatura dell'acqua raggiunge i *50 °C*?

b) Una volta raggiunta la temperatura di *50 °C*, viene rimossa la coibentatura e la resistenza elettrica viene spenta. La superficie esterna del recipiente è esposta all'aria a *T=25 °C* e il calore è rimosso con l'ausilio di un ventilatore che imprime all'aria una velocità di *10 m/s*. In quanto tempo la temperatura dell'acqua scende a *30 °C*?

<u>Proprietà</u>

Acqua: densità *1 g/cm*$^3$; calore specifico *4.186 kJ/kg/K*.

Aria: viscosità $1.8\cdot10^{-5}$ *Pa·s*; conducibilità *0.025 W/m/K*; calore specifico *1010 J/kg/K*

**Soluzione:**

a. Riscaldamento:

$$m\frac{d\tilde{E}}{dt} = \dot{Q} \tag{30}$$

$$\rho Vc\frac{dT}{dt} = \dot{Q} \tag{31}$$

$$T = T_0 + \frac{\dot{Q}}{\rho Vc}t \tag{32}$$

$$t = \left(T - T_0\right)\frac{\rho Vc}{\dot{Q}} \tag{33}$$

b. Raffreddamento:

$$\rho Vc\frac{dT}{dt} = h\left(T_a - T\right)A \tag{34}$$

$$\int_{T_c}^{T_f}\frac{dT}{\left(T_a - T\right)} = \int_0^t\frac{hA}{\rho Vc}dt \tag{35}$$

$$-\ln\frac{T_a - T_f}{T_a - T_c} = \frac{hA}{\rho Vc}t \tag{36}$$

$$\ln\frac{T_a - T_c}{T_a - T_f} = \frac{hA}{\rho Vc}t \tag{37}$$