

Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 5 (FIC) - 14 Gennaio 2016

Scambio di materia (I)

Esercizio 1 – Sublimazione di una sfera di naftalina

Si consideri una sferetta di naftalina avente diametro iniziale pari a 8 mm immersa in una atmosfera d'aria stagnante alla pressione atmosferica, alla temperatura di 300K .

- Si determinino le leggi che regolano l'andamento del diametro e della massa della sfera nel tempo, adottando le opportune ipotesi semplificative.
- Qual è il tempo necessario perché la sferetta si consumi completamente?
- Quale sarebbe invece il tempo richiesto se il diametro iniziale della sfera fosse pari a 16 mm ?
- Se anziché avere una forma sferica, la stessa massa di naftalina (punti 1 e 2) avesse la forma di un parallelepipedo di lati $L \times L \times 2L$, come si modificherebbero i tempi sopra calcolati?

Esercizio 2 – Stima della diffusività materiale della naftalina

Sapendo che un cubetto di naftalina di lato pari a 1 cm ha un tempo di dimezzamento massivo (cioè il tempo necessario perché la sua massa diventi pari alla metà della massa iniziale) pari a $t_{1/2}\text{ s}$ in una atmosfera di aria in quiete alla temperatura di 300K , si stimi il coefficiente di diffusione materiale della naftalina in tali condizioni.

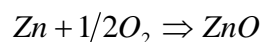
Esercizio 3 – Scioglimento di un cristallo di zucchero

Un cristallo di zucchero di canna, di forma sferica e avente diametro pari a 0.5 cm , viene posto in acqua pura alla temperatura di 20°C . L'acqua è ferma. Si vuole sapere in quanto tempo il cristallo si consuma completamente. Si tenga conto che la concentrazione dello zucchero nel bulk dell'acqua può ritenersi nulla essendo infinitamente esteso l'ambiente in cui si trova. Il cristallo si mantiene sferico durante il processo.

| | |
|--|--|
| <i>solubilità in acqua a 20°C</i> | <i>203.9 g/100g acqua</i> |
| <i>densità dello zucchero</i> | <i>1.588 g/cm³</i> |
| <i>densità dell'acqua</i> | <i>998 Kg/m³</i> |
| <i>diffusività dello zucchero in acqua</i> | <i>$0.5 \cdot 10^{-5}\text{ cm}^2/\text{s}$</i> |

Esercizio 4 – Consumo di una particella di zinco

Lo zinco in ambiente ad elevata temperatura ed elevato tenore di ossigeno, reagisce secondo la reazione:



Considerando una temperatura media di 1200°C , una particella sferica di zinco avente un diametro iniziale $D_p = 600\text{ }\mu\text{m}$ ed una densità pari a 7133 Kg/m^3 ed un coefficiente di diffusione dell'ossigeno nella miscela pari a $2.065 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$, si calcoli il tempo necessario per consumare completamente la particella sapendo inoltre che l'ambiente circostante è in quiete a pressione atmosferica con una pressione parziale di ossigeno P_{O_2} pari a 0.2 atm ($PM_{\text{Zn}} = 65,38\text{ Kg/Kmole}$).

Esercizio 5 – Combustione di una gocciolina di olio

Valutare il tempo necessario alla completa combustione completa di una goccia (sferica) di olio combustibile delle dimensioni di $50 \mu\text{m}$. La goccia è ferma e non c'è movimento relativo fra essa e l'aria circostante. Si ritenga che la reazione avvenga istantaneamente sulla superficie della goccia. La concentrazione media dell'ossigeno nella fase gassosa può essere considerata costante e pari ad una frazione molare di 0.15 . Il numero medio di atomi di carbonio dell'olio combustibile è pari a 50 mentre il rapporto idrogeno su carbonio vale 1.64 . La temperatura del gas è pari a 750°C mentre la pressione è pari a 1 atm .

| | | | | |
|-----------------------------|-----|------------------------|------------------|-----------------------------|
| ρ_{olio} | 980 | Kg/m^3 | D_{gas} | $0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$ |
| $D_{\text{O}_2/\text{gas}}$ | 0.2 | cm^2/s | | |

Esercizio 6 – Separazione dell'elio attraverso un vetro poroso

Un metodo di separazione dell'elio da una miscela di altri gas, sfrutta la proprietà di un particolare vetro poroso permeabile all'elio ma approssimativamente impermeabile agli altri gas. L'apparecchio adibito a tale operazione è costituito da un tubo attraverso il quale viene fatta passare la miscela da trattare. Immaginando di poter ritenere costante la portata molare complessiva, trascurabili le perdite di carico e costante la velocità dei gas all'interno del tubo, si valuti la lunghezza necessaria per avere una frazione molare di elio nella corrente pari al 50% di quella all'ingresso. Si ipotizzi che la concentrazione di elio all'esterno del tubo sia nulla. Da ultimo si assuma un sistema di coordinate rettangolari e si confrontino i risultati ottenuti utilizzando un sistema di coordinate cilindriche.

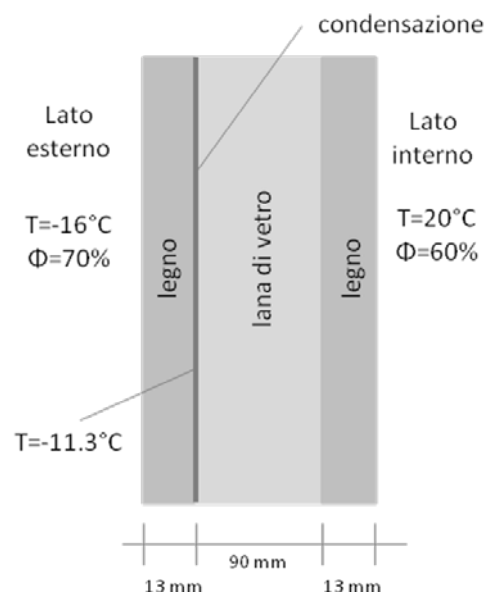
| | | | |
|-------------------------|-------------------------------|--|--|
| raggio interno del tubo | $1.4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ | velocità del gas | $3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ |
| raggio esterno del tubo | $1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ | diffusività materiale di He nel solido | $1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ |

Esercizio 7 – Condensazione e congelamento dell'umidità nei muri

La condensazione e il conseguente congelamento dell'umidità nelle pareti esterne delle costruzioni rappresenta un serio problema nei paesi dal clima rigido, in quanto compromette l'efficacia dell'isolamento termico e la durata dei materiali stessi.

Si consideri una parete costituita da uno strato di legname di spessore pari a 13 mm che affaccia sul lato esterno, uno strato di isolante centrale di spessore pari a 90 mm costituito da lana di vetro e un secondo strato di legname di spessore ancora pari a 13 mm che affaccia sul lato interno. All'interno della costruzione la temperatura sia pari a 20°C con una umidità relativa pari al 60% . All'esterno si assuma invece una temperatura di -16°C e umidità relativa del 70% .

Si determini la velocità (in termini massivi) secondo cui avviene il congelamento dell'umidità nello strato di isolante, sapendo che la temperatura di questo sul lato verso l'esterno è pari a -11.3°C .



Dati

| | |
|-------------------------------|---|
| resistenza dell'isolante: | $0.0100 \text{ s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}/\text{ng}$ |
| resistenza del legno esterno: | $0.0020 \text{ s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}/\text{ng}$ |
| resistenza del legno interno: | $0.0020 \text{ s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}/\text{ng}$ |

Correlazione di Antoine per la tensione di vapore dell'acqua:

$$\ln[P_{V_{H_2O}}(T)] = A - \frac{B}{(T + C)} \quad [mmHg] \quad T[K]$$

$$A = 18.3036$$

$$B = 3816.44$$

$$C = -46.13$$

Esercizio 8 – Scioglimento di una sostanza organica

Un filo di sostanza organica solida, sospeso in olio minerale, viene sciolto progressivamente. Si chiede di determinare, attraverso le opportune semplificazioni, il tempo necessario al suo completo consumo, supponendo che il filo mantenga la sua forma cilindrica fino al termine. Nel bulk dell'olio la concentrazione di soluto è trascurabile.

Si richiede di commentare adeguatamente le equazioni che verranno utilizzate, le eventuali semplificazioni adottate e i calcoli eseguiti. Si presti particolare attenzione alla corretta conversione delle diverse unità di misura.

Dati

| | |
|-----------------------------|---|
| diámetro iniziale del filo: | 0.052 cm |
| diffusività olio-soluto: | $9.9 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$ |
| viscosità dell'olio: | 3 Poises |
| densità dell'olio: | 1200 kg/m^3 |
| peso molecolare soluto: | 178 kg/kmol |
| solubilità solido: | 10^{-3} mol/cm^3 |
| densità solido: | 1.5 g/cm^3 |

Esercizio 9 – Crescita di un cristallo di sale

Si valutino le dimensioni che raggiunge in 2 giorni un cristallo di sale, di forma cubica e dimensione iniziale pari a 10 micron, in una soluzione sovrassatura in quiete.

Dati

| | |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| concentrazione di sovrassaturazione: | 10 g/l |
| densità del cristallo solido: | 2000 kg/m^3 |
| diffusività del sale nella soluzione: | $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ |

Esercizio 10 – Barra di naftalina (Tema d'esame 12 Febbraio 2009)

Una barra cilindrica di naftalina è investita perpendicolarmente da una corrente di aria con velocità pari a $3.5 + 0.1x \text{ m/s}$. L'aria e la barra di naftalina si trovano ad una temperatura di 40°C . Si determini la velocità iniziale di consumo della barra di naftalina (in mol/s), assumendo nulla la concentrazione della naftalina nel bulk.

| Dati | | |
|-------------------------------------|----------------------|------------------------|
| Diámetro della barra | $25 + 0.2x$ | mm |
| Lunghezza della barra | 50 | cm |
| Viscosità dell'aria | $2.75 \cdot 10^{-5}$ | kg/m/s |
| Diffusività della naftalina in aria | $6.20 \cdot 10^{-2}$ | cm^2/s |
| Tensione di vapore della naftalina | 15 | mm Hg |

| Numero di Sherwood (cilindro) |
|--|
| $Sh_D = 2 + (1.6Re_D^{1/3} + 0.5Re_D^{1/2} + 0.02Re_D^{0.8}) \cdot Sc^{1/3}$ |

Esercizio 11 – Sfera di naftalina (Tema d'esame 7 Luglio 2009)

Una sfera di naftalina di diametro iniziale pari a $25+0.2x$ mm è in una atmosfera di aria in quiete completa. L'aria e la sfera di naftalina si trovano ad una temperatura di 40°C . Si determini il tempo necessario perchè il diametro della sfera diventi la metà di quello iniziale.

| Dati | | |
|--|----------------------|------------------------|
| <i>Diffusività della naftalina in aria</i> | $6.20 \cdot 10^{-2}$ | cm^2/s |
| <i>Tensione di vapore della naftalina</i> | 15 | mm Hg |
| <i>Densità della naftalina</i> | 1150 | kg/m^3 |
| <i>Peso molecolare della naftalina</i> | 128.16 | kg/kmol |

Proprietà dell'aria

| T(K) | Calore specifico (kJ/kgK) | Viscosità dinamica (Pa.s) $\cdot 10^7$ | Viscosità cinematica (m ² /s) $\cdot 10^6$ | Conducibilità termica (W/mK) $\cdot 10^3$ | Diffusività termica (m ² /s) $\cdot 10^6$ | Numero di Prandtl |
|------|---------------------------|--|---|---|--|-------------------|
| 300 | 1.007 | 184.6 | 15.89 | 26.3 | 22.5 | 0.707 |

Proprietà della naftalina

| <i>PM (kg/kmol)</i> | <i>ρ (kg/m³)</i> | <i>Pv (bar)</i> | <i>D (m²/s)</i> |
|---------------------|---|-----------------|----------------------------|
| 128.16 | 800 | 0.000131 | $7 \cdot 10^{-6}$ |

Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 11 – 16 Gennaio 2014

Scambio di materia (I)

Tensione di vapore dell'acqua

$$\ln(P_{ev}) = A - \frac{B}{T + C}$$

$$A = 18.3036$$

$$B = 3816.44$$

$$C = -46.13$$

(temperatura in K e tensione di
vapore in mmHg)

Proprietà dell'aria

| <i>T(K)</i> | <i>Calore specifico (kJ/kg/K)</i> | <i>Viscosità dinamica (Pa·s) ·10⁷</i> | <i>Viscosità cinematica (m²/s) ·10⁶</i> | <i>Conducibilità termica (W/m/K) ·10³</i> | <i>Diffusività termica (m²/s)</i> | <i>Numero di Prandtl</i> |
|-------------|---|--|---|--|--|----------------------------------|
| 250 | 1.006 | 159.6 | 11.44 | 22.3 | 15.9 | 0.720 |
| 300 | 1.007 | 184.6 | 15.89 | 26.3 | 22.5 | 0.707 |
| 350 | 1.009 | 208.2 | 20.92 | 30.0 | 29.9 | 0.700 |
| 400 | 1.014 | 230.1 | 26.41 | 33.8 | 38.3 | 0.690 |
| 450 | 1.021 | 250.7 | 32.39 | 37.3 | 47.2 | 0.686 |
| 500 | 1.030 | 270.1 | 38.79 | 40.7 | 56.7 | 0.684 |
| 550 | 1.040 | 288.4 | 45.57 | 43.9 | 66.7 | 0.683 |
| 600 | 1.051 | 305.8 | 52.69 | 46.9 | 76.9 | 0.685 |
| 650 | 1.063 | 322.5 | 60.21 | 49.7 | 87.3 | 0.690 |

Esercizio 1 – Sublimazione di una sfera di naftalina

Si consideri una sferetta di naftalina avente diametro iniziale pari a 8 mm immersa in una atmosfera d'aria stagnante alla pressione atmosferica, alla temperatura di 300K .

1. Si determinino le leggi che regolano l'andamento del diametro e della massa della sfera nel tempo, adottando le opportune ipotesi semplificative.
2. Qual è il tempo necessario perchè la sferetta si consumi completamente?
3. Quale sarebbe invece il tempo richiesto se il diametro iniziale della sfera fosse pari a 16 mm ?
4. Se anzichè avere una forma sferica, la stessa massa di naftalina (punti 1 e 2) avesse la forma di un parallelepipedo di lati $L \times L \times 2L$, come si modificherebbero i tempi sopra calcolati?

Soluzione

Presentata in aula

Esercizio 2 – Stima della diffusività materiale della naftalina

Sapendo che un cubetto di naftalina di lato pari a 1 cm ha un tempo di dimezzamento massivo (cioè il tempo necessario perchè la sua massa diventi pari alla metà della massa iniziale) pari a $t_{1/2}$ s in una atmosfera di aria in quiete alla temperatura di 300K , si stimi il coefficiente di diffusione materiale della naftalina in tali condizioni.

Soluzione

Presentata in aula

Esercizio 3 – Scioglimento di un cristallo di zucchero

Un cristallo di zucchero di canna, di forma sferica e avente diametro pari a 0.5 cm, viene posto in acqua pura alla temperatura di 20°C. L'acqua è ferma. Si vuole sapere in quanto tempo il cristallo si consuma completamente. Si tenga conto che la concentrazione dello zucchero nel bulk dell'acqua può ritenersi nulla essendo infinitamente esteso l'ambiente in cui si trova. Il cristallo si mantiene sferico durante il processo.

Dati

| | |
|-------------------------------------|---|
| solubilità in acqua a 20 °C | 203.9 g/100g acqua |
| densità dello zucchero | 1.588 g/cm ³ |
| densità dell'acqua | 998 Kg/m ³ |
| Diffusività dello zucchero in acqua | 0.5 10 ⁻⁵ cm ² /s |

Soluzione

La velocità con cui il cristallo di zucchero si scioglie dipende dalla diffusione dello stesso nell'ambiente acquoso circostante. L'equazione di bilancio scritta intorno al cristallo dovrà quindi descrivere tale fenomeno attraverso una variazione della massa dello stesso a causa di un flusso diffusivo di materia. Pertanto essa verrà scritta come:

$$\frac{dm_c}{dt} = -k_c \Delta C \cdot S_c \cdot PM_c$$

dove: m_c = massa del cristallo di zucchero = $\rho_c V_c = \rho_c \frac{\pi D_c^3}{6}$

$$dm_c = \rho_c \frac{\pi D_c^2}{2} dD_c$$

$$S_c = \pi D_c^2$$

$$\Delta C = C_{sup}$$

L'equazione di bilancio verrà pertanto riscritta come:

$$\rho_c \frac{\pi D_c^2}{2} \frac{dD_c}{dt} = -k_c C_{sup} \cdot \pi D_c^2 \cdot PM_c \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_c}{2} \frac{dD_c}{dt} = -k_c C_{sup} \cdot PM_c$$

Dall'equazione scritta sarà possibile dedurre il tempo necessario per il completo consumo del cristallo una volta valutato il coefficiente di scambio di materia. Per quanto riguarda la valutazione della concentrazione all'interfaccia del cristallo con l'acqua, essa è legata alla solubilità che ne esprime il prodotto per il peso molecolare. Si avrà perciò:

$$C_{sup} \cdot PM_c = \frac{\text{solubilità} \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3} / 998} \cong 2035 \text{ kg/m}^3$$

Essendo l'ambiente acquoso in quiete, e la forma del cristallo sferica, si ha che il processo è caratterizzato da un numero di Sherwood pari a 2. Pertanto il coefficiente di scambio di materia sarà dato da:

$$Sh = 2 = \frac{k_c \cdot D_c}{\mathcal{D}} \quad \Rightarrow \quad k_c = \frac{2 \cdot \mathcal{D}}{D_c}$$

sostituendo infine nell'equazione di bilancio di materia e rielaborando, si ottiene:

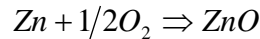
$$-\frac{\rho_c}{4 \cdot 2035} \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} \int_{D_c^0}^0 D_c dD_c = t$$

Il tempo necessario per il completo scioglimento vale pertanto:

$$t = \frac{\rho_c}{8 \cdot 2035} \cdot \frac{D_c^0{}^2}{\mathcal{D}} = \frac{1588}{8 \cdot 2035} \cdot \frac{(0.005)^2}{0.5 \cdot 10^{-9}} = 4877 \text{ s} = 1.35 \text{ h}$$

Esercizio 4 – Consumo di una particella di zinco

Lo zinco in ambiente ad elevata temperatura ed elevato tenore di ossigeno, reagisce secondo la reazione:



Considerando una temperatura media di 1200 °C, una particella sferica di zinco avente un diametro iniziale $D_p = 600 \mu\text{m}$ ed una densità pari a 7133 Kg/m^3 ed un coefficiente di diffusione dell'ossigeno nella miscela pari a $2.065 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, si calcoli il tempo necessario per consumare completamente la particella sapendo inoltre che l'ambiente circostante è in quiete a pressione atmosferica con una pressione parziale di ossigeno P_{O_2} pari a 0.2 atm ($\text{PM}_{\text{Zn}} = 65,38 \text{ Kg/Kmole}$).

Soluzione

Nel caso preso in esame, essendo la reazione istantanea, il fenomeno di consumo della particella di zinco è dettato dall'afflusso di ossigeno sulla superficie della particella stessa, dove quest'ultimo risulta assente perchè immediatamente trasformato (si suppone che l'ossido di Zinco si stacchi continuamente e non costituisca perciò un'ulteriore resistenza al flusso di ossigeno). Poiché l'ambiente è in quiete, il numero di Sherwood caratteristico del sistema è pari a 2. Si scriva ora il bilancio materiale tenendo conto che per ogni molecola di ossigeno che perviene sulla superficie della particella, si consumano due moli di Zinco:

$$\frac{dm}{dt} = -2j_{\text{O}_2} S \cdot \text{PM}_{\text{Zn}}$$

dove: $m = \text{massa della particella} = \rho_{\text{Zn}} \cdot V_{\text{Zn}} = \rho_{\text{Zn}} \frac{\pi \cdot D_p^3}{6}$

$D_p = \text{diametro della particella}$

$\rho_{\text{Zn}} = \text{densità della particella}$

$S = \text{superficie della particella} = \pi \cdot D_p^2$

$\text{PM}_{\text{Zn}} = \text{peso molecolare dello Zinco}$

$j_{\text{O}_2} = \text{flusso molare di ossigeno} = k_c \Delta C = k_c C_{\text{O}_2}$

$C_{\text{O}_2} = \text{concentrazione dell'ossigeno nell'ambiente} = \frac{P_{\text{O}_2}}{RT}$

L'equazione di bilancio scritta può essere anche trasformata nella seguente forma:

$$\rho_{\text{Zn}} \cdot \frac{\pi \cdot D_p^2}{2} \frac{dD_p}{dt} = -2 \cdot k_c \cdot C_{\text{O}_2} \pi \cdot D_p^2 \cdot \text{PM}_{\text{Zn}}$$

Il coefficiente di scambio materiale k_c è legato al numero di Sherwood (o Nusselt materiale) come segue:

$$\text{Sh} = \frac{k_c \cdot D_p}{\mathcal{D}} = 2 \Rightarrow k_c = \frac{2 \cdot \mathcal{D}}{D_p}$$

L'equazione di bilancio diventa conseguentemente:

$$D_p \frac{dD_p}{dt} = -8 \frac{P_{\text{O}_2}}{RT} \frac{\text{PM}_{\text{Zn}}}{\rho_{\text{Zn}}} \mathcal{D}$$

Il tempo di consumo della particella è allora dato da:

$$t_{\text{cons.}} = \frac{D_p^2 \cdot RT \cdot \rho_{\text{Zn}}}{16 \cdot P_{\text{O}_2} \cdot PM_{\text{Zn}} \cdot \mathcal{D}} \cong 7 \text{ sec}$$

Esercizio 5 – Combustione di una gocciolina di olio

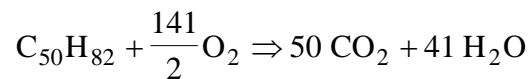
Valutare il tempo necessario alla completa combustione completa di una gocciolina (sferica) di olio combustibile delle dimensioni di 50 μm . La gocciolina è ferma e non c'è movimento relativo fra essa e l'aria circostante. Si ritenga che la reazione avvenga istantaneamente sulla superficie della gocciolina. La concentrazione media dell'ossigeno nella fase gassosa può essere considerata costante e pari ad una frazione molare di 0.15. Il numero medio di atomi di carbonio dell'olio combustibile è pari a 50 mentre il rapporto idrogeno su carbonio vale 1.64. La temperatura del gas è pari a 750 $^{\circ}\text{C}$ mentre la pressione è pari a 1 atm.

Dati

| | | |
|-----------------------------|-----|------------------------|
| ρ_{olio} | 980 | Kg/m^3 |
| $D_{\text{O}_2/\text{gas}}$ | 0.2 | cm^2/s |
| V_{gas} | 0.5 | cm^2/s |

Soluzione

Essendo il rapporto H/C pari a 1.64 e il numero medio di atomi di carbonio pari a 50, il numero medio di atomi di idrogeno risulta pari a 82. La reazione di combustione completa a dare CO_2 ed H_2O ha pertanto la seguente stechiometria:



Quindi per ogni molecola di ossigeno che perviene in contatto con la gocciolina, si consumano 2/141 di molecole di olio combustibile. Il processo di consumo è caratterizzato dal trasporto di ossigeno dal bulk della fase gassosa alla superficie della gocciolina dove reagisce scomparendo istantaneamente. L'equazione di bilancio materiale che descrive il consumo della gocciolina in seguito alla reazione è dunque dato da:

$$\frac{dm_{\text{olio}}}{dt} = -\frac{2}{141} J_{\text{O}_2} \cdot PM_{\text{olio}} = -\frac{2}{141} k_c \Delta C_{\text{O}_2} S_{\text{gocciolina}} \cdot PM_{\text{olio}}$$

dove: m_{olio} = massa di olio combustibile = $\rho_{\text{gocciolina}} V_{\text{gocciolina}} = \rho_{\text{gocciolina}} \frac{\pi D_{\text{gocciolina}}^3}{6}$

$$dm_{\text{olio}} = \rho_{\text{gocciolina}} \frac{\pi D_{\text{gocciolina}}^2}{2} dD_{\text{gocciolina}}$$

$$S_{\text{gocciolina}} = \pi D_{\text{gocciolina}}^2$$

$$\Delta C_{\text{O}_2} = C_{\text{O}_2} \text{ nel bulk} = \frac{P y_{\text{O}_2}}{RT}$$

$$PM_{\text{olio}} = 682 \text{ Kg/Kmole}$$

Il coefficiente di scambio di materia è legato al numero di Sherwood, che nelle condizioni assegnate vale 2 ($Sh = 2$), esso risulta quindi pari a:

$$k_c = \frac{Sh \cdot D_{\text{O}_2-\text{gas}}}{D_{\text{gocciolina}}} = \frac{2 \cdot D_{\text{O}_2-\text{gas}}}{D_{\text{gocciolina}}}$$

L'equazione da integrare risulta quindi:

$$D_{\text{goccia}} dD_{\text{goccia}} = -1.41 \cdot 10^{-9} dt$$

Il tempo necessario è dunque pari a: $t = 0.88 \text{ sec.}$

Esercizio 6 – Separazione dell'elio attraverso un vetro poroso

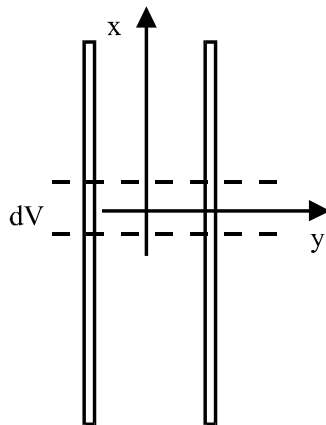
Un metodo di separazione dell'elio da una miscela di altri gas, sfrutta la proprietà di un particolare vetro poroso permeabile all'elio ma approssimativamente impermeabile agli altri gas. L'apparecchio adibito a tale operazione è costituito da un tubo attraverso il quale viene fatta passare la miscela da trattare. Immaginando di poter ritenere costante la portata molare complessiva, trascurabili le perdite di carico e costante la velocità dei gas all'interno del tubo, si valuti la lunghezza necessaria per avere una frazione molare di elio nella corrente pari al 50% di quella all'ingresso. Si ipotizzi che la concentrazione di elio all'esterno del tubo sia nulla. Da ultimo si assuma un sistema di coordinate rettangolari e si confrontino i risultati ottenuti utilizzando un sistema di coordinate cilindriche.

Dati

| | |
|--|-------------------------------------|
| raggio interno del tubo | $1.4 \cdot 10^{-2}$ m |
| raggio esterno del tubo | $1.5 \cdot 10^{-2}$ m |
| velocità del gas | $3 \cdot 10^{-2}$ m/s |
| diffusività materiale dell'elio nel solido | $1 \cdot 10^{-8}$ m ² /s |

Soluzione

L'esempio proposto è schematizzabile come in figura:



Le ipotesi sono le seguenti:

- moto stazionario
- conservazione della portata molare (le variazioni lungo x sono infatti trascurabili rispetto a quelle in direzione y)
- concentrazione di elio all'esterno del sistema pari a 0
- velocità dei gas costante all'interno del tubo

a. Bilancio di materia sulla fase gas

Si assuma una composizione uniforme della miscela gassosa in corrispondenza di ciascuna traversa perpendicolare all'asse della tubazione. Il problema è caratterizzato da una diffusione stazionaria dell'elio attraverso la parete di vetro poroso.

Il bilancio (macroscopico) sull'elemento dV , con superficie laterale dS (attraverso cui avviene la diffusione dell'He), che descrive la variazione di concentrazione dell'elio lungo il tubo, è il seguente:

$$Q_{gas} dC_{He} = -J_{He} \cdot dS$$

La superficie dS può essere espressa più semplicemente come:

$$dS = \pi D_i \cdot dx$$

Quindi il bilancio macroscopico assume la seguente espressione:

$$\frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -J_{He}$$

Il flusso diffusivo di He può essere semplicemente stimato attraverso la legge di Fick applicata sulla parete porosa della tubazione. Prima tuttavia è necessario determinare il profilo di concentrazione di He in tale parete; solo in questo modo sarà possibile l'applicazione della legge di Fick.

b. Integrazione dell'equazione di Fick generalizzata nella parete porosa

Il flusso di elio attraverso la parete può essere ottenuto dalla legge di Fick una volta noto il profilo di concentrazione dell'elio a cavallo della parete porosa. Quest'ultimo può essere ottenuto dal bilancio locale fatto intorno alla parete solida. In termini molari si ha in generale:

$$\frac{DC_{He}^*}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{J}_{He} + R_{He}$$

Date le ipotesi del problema, l'equazione che descrive la diffusione stazionaria dell'elio attraverso la parete porosa diventa (in coordinate cilindriche):

$$\Gamma \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC_{He}^*}{dr} \right) = 0$$

dove C_{He}^* è la concentrazione di elio nella parete porosa (da non confondere con C_{He} , con cui si indica la concentrazione di elio nella fase gas)

Le condizioni al contorno sono:

$$\text{coordinate cilindriche: } \begin{cases} C_{He}^* = C_{He} & \text{per } r=r_i \\ C_{He}^* = 0 & \text{per } r=r_e \end{cases}$$

dove: $r_i = \text{raggio interno}$
 $r_e = \text{raggio esterno}$

Integrando si ottiene:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dC_{He}^*}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dC_{He}^*}{dr} = C_1 \Rightarrow C_{He}^* = C_1 \ln r + C_2$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 \ln r_e + C_2 \\ C_{He} = C_1 \ln r_i + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{C_{He}}{\ln r_i / r_e} \quad C_2 = -\frac{C_{He} \ln r_e}{\ln r_i / r_e}$$

$$C_{He}^* = \frac{C_{He}}{\ln r_i/r_e} \left(\ln \frac{r}{r_e} \right)$$

da cui si ricava il flusso diffusivo di elio:

$$J_{He} = -\Gamma_{He} \frac{dC_{He}^*}{dr} \Big|_{r=r_i} = -\Gamma_{He} \frac{C_{He}}{r_i \ln r_i/r_e} = -\Gamma_{He} \frac{2C_{He}}{D_i \ln D_i/D_e}$$

c. *Combinazione del bilancio sulla fase gas con la legge di Fick*

Sostituendo a questo punto il flusso diffusivo ottenuto nell'equazione di bilancio effettuato sull'elementino dV di fase gassosa, si ottiene

$$\frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -J_{He} \quad \frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -\Gamma_{He} \frac{2C_{He}}{D_i \ln(D_i/D_e)}$$

Allo scopo di dedurre la lunghezza di tubo necessaria occorrerà quindi integrare l'equazione attraverso il metodo di separazione delle variabili:

$$\frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -\Gamma_{He} \frac{2C_{He}}{D_i \ln(D_i/D_e)}$$

$$\frac{dC_{He}}{C_{He}} = -\Gamma_{He} \frac{2}{D_i \ln(D_i/D_e)} \frac{\pi D_i}{Q_{gas}} dx$$

$$\frac{dC_{He}}{C_{He}} = -A \cdot dx \quad A = \Gamma_{He} \frac{2}{D_i \ln(D_i/D_e)} \frac{\pi D_i}{Q_{gas}} = \frac{2\pi\Gamma_{He}}{Q_{gas} \ln(D_i/D_e)}$$

$$C_{He} = B \cdot e^{-A \cdot x}$$

La costante di integrazione B può essere determinata sfruttando la condizione iniziale:

$$C_{He}(x=0) = C_{He}^0$$

Quindi il profilo di concentrazione lungo la tubazione è il seguente:

$$C_{He} = C_{He}^0 \cdot e^{-A \cdot x}$$

La lunghezza necessaria per dimezzare la concentrazione rispetto al valore in ingresso è data da:

$$\frac{C_{He}^0}{2} = C_{He}^0 \cdot e^{-A \cdot L}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-A \cdot L} \quad \ln(0.50) = -A \cdot L \quad L = -\frac{\ln(0.50)}{A} = 14.2m$$

d. Approfondimento

Se la parete della tubazione fosse trattata come piana, trascurando la curvatura, non si otterrebbe un valore molto diverso della lunghezza. Questo è dovuto al fatto che la curvatura della parete non è elevata e si può dunque trascurare. La legge di Fick da integrare diventa la seguente:

$$\Gamma_{He} \frac{d^2 C_{He}^*}{dy^2} = 0$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\text{coordinate ortogonali: } \begin{cases} C_{He}^* = C_{He} & \text{per } y=r_i \\ C_{He}^* = 0 & \text{per } y=r_e \end{cases}$$

dove: r_i = raggio interno
 r_e = raggio esterno

Integrando si ottiene:

$$\Gamma_{He} \frac{d^2 C_{He}^*}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{dC_{He}^*}{dy} = C_1 \Rightarrow C_{He}^* = C_1 y + C_2$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 r_e + C_2 \\ C_{He} = C_1 r_i + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{C_{He}}{r_e - r_i} = -\frac{C_{He}}{\delta} \quad C_2 = \frac{C_{He}}{\delta} r_e \Rightarrow C_{He}^* = \frac{C_{He}}{\delta} (r_e - y)$$

da cui si ricava il flusso diffusivo di elio: $J_{He} = -\Gamma_{He} \left. \frac{dC_{He}^*}{dy} \right|_{y=r_i} = \Gamma_{He} \frac{C_{He}}{\delta}$

Sostituendo a questo punto il flusso diffusivo ottenuto nell'equazione di bilancio effettuato sull'elementino dV di fase gassosa, si ottiene

$$\frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -J_{He} \quad \frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -\Gamma_{He} \frac{C_{He}}{\delta}$$

Allo scopo di dedurre la lunghezza di tubo necessaria occorrerà quindi integrare l'equazione attraverso il metodo di separazione delle variabili:

$$\frac{Q_{gas}}{\pi D_i} \frac{dC_{He}}{dx} = -\Gamma_{He} \frac{C_{He}}{\delta}$$

$$\frac{dC_{He}}{dx} = -\Gamma_{He} \frac{C_{He}}{\delta} \frac{\pi D_i}{Q_{gas}}$$

$$\frac{dC_{He}}{C_{He}} = -\frac{\Gamma_{He}}{\delta} \frac{\pi D_i}{Q_{gas}} dx = -A \cdot dx$$

$$\frac{dC_{He}}{C_{He}} = -A \cdot dx \quad A = \frac{\Gamma_{He}}{\delta} \frac{\pi D_i}{Q_{gas}}$$

$$C_{He} = B \cdot e^{-A \cdot x}$$

Quindi il profilo di concentrazione lungo la tubazione e' il seguente:

$$C_{He} = C_{He}^0 \cdot e^{-A \cdot x}$$

La lunghezza necessaria per dimezzare la concentrazione rispetto al valore in ingresso e' data da:

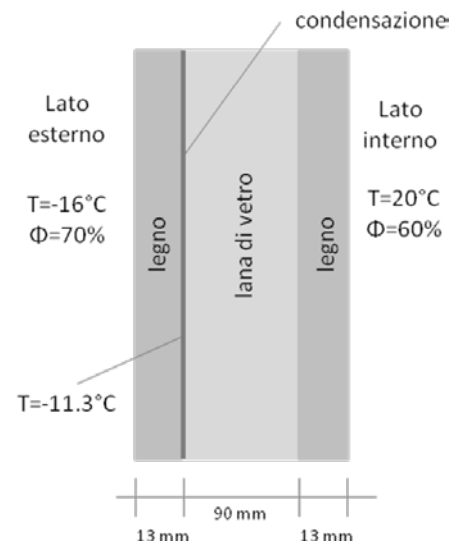
$$\frac{C_{He}^0}{2} = C_{He}^0 \cdot e^{-A \cdot L}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-A \cdot L} \quad \ln(0.50) = -A \cdot L \quad L = -\frac{\ln(0.50)}{A} = 14.7m$$

Esercizio 7 – Condensazione e congelamento dell'umidità nei muri

La condensazione e il conseguente congelamento dell'umidità nelle pareti esterne delle costruzioni rappresenta un serio problema nei paesi dal clima rigido, in quanto compromette l'efficacia dell'isolamento termico e la durata dei materiali stessi.

Si consideri una parete costituita da uno strato di legname di spessore pari a 13 mm che affaccia sul lato esterno, uno strato di isolante centrale di spessore pari a 90 mm costituito da lana di vetro e un secondo strato di legname di spessore ancora pari a 13 mm che affaccia sul lato interno. All'interno della costruzione la temperatura sia pari a 20°C con una umidità relativa pari al 60%. All'esterno si assuma invece una temperatura di -16°C e umidità relativa del 70%.

Si determini la velocità (in termini massivi) secondo cui avviene il congelamento dell'umidità nello strato di isolante, sapendo che la temperatura di questo sul lato verso l'esterno è pari a -11.3°C.



Dati

resistenza dell'isolante: $0.0100 \text{ s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}/\text{ng}$

resistenza del legno esterno: $0.0020 \text{ s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}/\text{ng}$

resistenza del legno interno: $0.0020 \text{ s}\cdot\text{m}^2\cdot\text{Pa}/\text{ng}$

Correlazione di Antoine per la tensione di vapore dell'acqua:

$$\ln[P_{V_{H_2O}}(T)] = A - \frac{B}{(T + C)} \quad [\text{mmHg}] \quad T[\text{K}]$$

$$A = 18.3036$$

$$B = 3816.44$$

$$C = -46.13$$

Esercizio 8 – Scioglimento di una sostanza organica

Un filo di sostanza organica solida, sospeso in olio minerale, viene sciolto progressivamente. Si chiede di determinare, attraverso le opportune semplificazioni, il tempo necessario al suo completo consumo, supponendo che il filo mantenga la sua forma cilindrica fino al termine. Nel bulk dell'olio la concentrazione di soluto è trascurabile.

Si richiede di commentare adeguatamente le equazioni che verranno utilizzate, le eventuali semplificazioni adottate e i calcoli eseguiti. Si presti particolare attenzione alla corretta conversione delle diverse unità di misura.

Dati

| | |
|--------------------------------|---|
| di diametro iniziale del filo: | <i>0.052 cm</i> |
| diffusività olio-soluto: | <i>$9.9 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$</i> |
| viscosità dell'olio: | <i>3 Poises</i> |
| densità dell'olio: | <i>1200 kg/m^3</i> |
| peso molecolare soluto: | <i>178 kg/kmol</i> |
| solubilità solido: | <i>10^{-3} mol/cm^3</i> |
| densità solido: | <i>1.5 g/cm^3</i> |

Esercizio 9 – Crescita di un cristallo di sale

Si valutino le dimensioni che raggiunge in 2 giorni un cristallo di sale, di forma cubica e dimensione iniziale pari a *10 micron*, in una soluzione sovrasatura in quiete.

Dati

| | |
|---------------------------------------|---|
| concentrazione di sovrasaturazione: | <i>10 g/l</i> |
| densità del cristallo solido: | <i>2000 kg/m³</i> |
| diffusività del sale nella soluzione: | <i>10⁻⁵ cm²/s</i> |

Soluzione

$$L = 0.263 \text{ cm}$$

Esercizio 10 – Barra di naftalina (Tema d’esame 12 Febbraio 2009)

Una barra cilindrica di naftalina e’ investita perpendicolarmente da una corrente di aria con velocita’ pari a $3.5+0.1x$ m/s. L’aria e la barra di naftalina si trovano ad una temperatura di 40°C .

Si determini la velocita’ iniziale di consumo della barra di naftalina (in mol/s), assumendo nulla la concentrazione della naftalina nel bulk.

| Dati | | |
|---|----------------------|-------------------------|
| <i>Diametro della barra</i> | $25 + 0.2x$ | <i>mm</i> |
| <i>Lunghezza della barra</i> | 50 | <i>cm</i> |
| <i>Viscosita’ dell’aria</i> | $2.75 \cdot 10^{-5}$ | <i>kg/m/s</i> |
| <i>Diffusivita’ della naftalina in aria</i> | $6.20 \cdot 10^{-2}$ | <i>cm²/s</i> |
| <i>Tensione di vapore della naftalina</i> | 15 | <i>mm Hg</i> |

| Numero di Sherwood (cilindro) |
|---|
| $Sh_D = 2 + \left(1.6Re_D^{1/3} + 0.5Re_D^{1/2} + 0.02Re_D^{0.8}\right) \cdot Sc^{1/3}$ |

Soluzione

La velocita’ con cui avviene il consumo della barra di naftalina nell’istante iniziale e’ data dalla seguente espressione:

$$\dot{n} = k_c S_{tot} (C_{sup} - C_{bulk}) \quad (2.1)$$

Il coefficiente di scambio puo’ essere calcolato utilizzando la correlazione proposta nel testo dell’esercizio. Questa tiene conto sia del contributo puramente diffusivo che dei contributi convettivi ed e’ valida per un corpo cilindrico investito da una corrente d’aria in direzione perpendicolare al suo asse. La due superfici di base, che ovviamente si consumano e che dovranno essere tenute in considerazione nella individuazione della velocita’ totale di consumo, dovrebbero essere trattate utilizzando una correlazione diversa. Tuttavia in prima approssimazione e’ possibile utilizzare la stessa correlazione valida per la superficie laterale. L’errore che si commette e’ piccolo (anche perche’ il contributo dato dalle due superfici di base e’ di per se’ piccolo, essendo tali basi piccole rispetto alla superficie laterale). Quindi la prima cosa da fare e’ valutare il numero di Re utilizzando il diametro come dimensione caratteristica e quindi procedere alla costruzione del numero di Sherwood:

$$Re_D = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (2.2)$$

$$Nu_D = 2 + \left(1.6Re_D^{1/3} + 0.5Re_D^{1/2} + 0.02Re_D^{0.8}\right) \cdot Sc^{1/3} \quad (2.3)$$

Quindi passiamo alla determinazione del coefficiente di scambio:

$$k_c = \frac{Sh \cdot \Gamma}{D} \quad (2.4)$$

La superficie che compare nella formula e’ quella totale:

$$S_{tot} = \left(\pi D L + 2 \frac{\pi D^2}{4}\right) = \pi D \left(L + \frac{D}{2}\right) = \frac{\pi D}{2} (2L + D) \quad (2.5)$$

La concentrazione della naftalina sulla superficie e' calcolabile attraverso la tensione di vapore e quella del bulk puo' essere considerata trascurabile:

$$C_{\text{sup}} = \frac{P_v}{RT} \quad (2.6)$$

Quindi in conclusione la velocita' iniziale di consumo e' pari a:

$$\dot{n} = k_c S_{\text{tot}} (C_{\text{sup}} - C_{\text{bulk}}) = k_c S_{\text{tot}} C_{\text{sup}} = \frac{Sh \cdot \Gamma \pi D}{D} (2L + D) \frac{P_v}{RT} = \frac{\pi}{2} Sh \cdot \Gamma (2L + D) \frac{P_v}{RT} \quad (2.7)$$

Esercizio 11 – Sfera di naftalina (Tema d'esame 7 Luglio 2009)

Una sfera di naftalina di diametro iniziale pari a $25+0.2x$ mm è in una atmosfera di aria in quiete completa. L'aria e la sfera di naftalina si trovano ad una temperatura di 40°C . Si determini il tempo necessario perchè il diametro della sfera diventi la metà di quello iniziale.

| Dati | | |
|--|----------------------|------------------------|
| <i>Diffusività della naftalina in aria</i> | $6.20 \cdot 10^{-2}$ | cm^2/s |
| <i>Tensione di vapore della naftalina</i> | 15 | mm Hg |
| <i>Densità della naftalina</i> | 1150 | kg/m^3 |
| <i>Peso molecolare della naftalina</i> | 128.16 | kg/kmol |