Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 4 - 29 Ottobre 2015

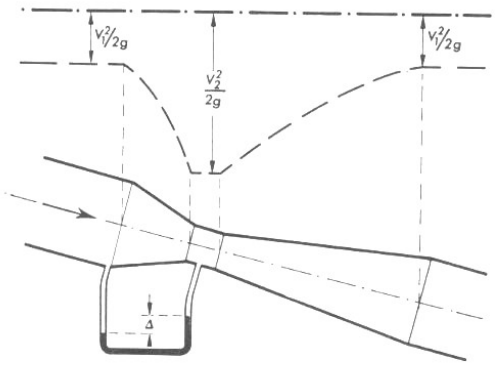
Equazione di Bernoulli

Esercizio 1 – Venturimetro (I)

Dato il sistema di figura (tubazione sulla quale è inserito un venturimetro), si determini la portata del fluido (acqua) sapendo che il dislivello del manometro differenziale a mercurio (γ = 101325 N/m^3) è pari a Δ=0.2 m. Le sezioni di passaggio del tubo e della sezione ristretta del venturimetro valgono rispettivamente: 0.2 e 0.096 m^2.

Soluzione

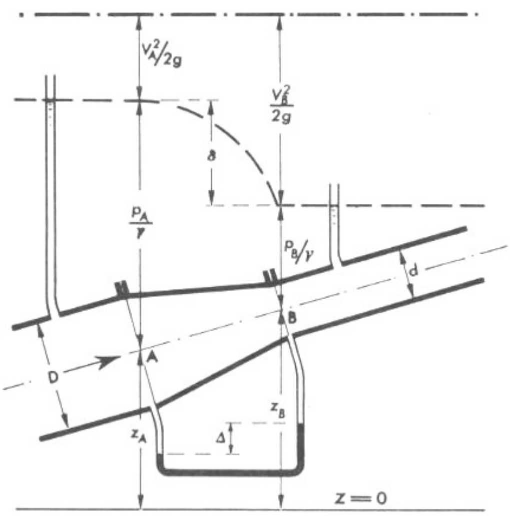
Il teorema di Bernoulli che abbiamo riconosciuto valido nelle note ipotesi, per una singola traiettoria, può essere esteso ad un'intera corrente di sezione finita. Si ammetterà che tale estensione possa compiersi, per una corrente gradualmente variata, semplicemente sostituendo nel termine cinetico alla velocità v nei singoli punti di una sezione trasversale la velocità media V=Q/A; in realtà, come si vedrà, sarebbe teoricamente necessaria una piccola correzione, che però non incide molto sui risultati pratici: l'ordine di grandezza dell'errore che si compie trascurandola non è in genere maggiore di quello che deriva dal trascurare le dissipazioni di energia, come richiede l'applicazione del teorema di Bernoulli.



Si consideri il dispositivo rappresentato in figura: un tubo di diametro D seguito da un breve tronco convergente e quindi da un altro tubo di diametro minore d. Si ammetta di poter trascurare di dissipazioni di energia nel convergente, data la sua brevità e anche per il fatto che nelle correnti accelerate esse sono sempre modeste; ammettiamo anche che, in prima approssimazione, la corrente possa considerarsi lineare. In ogni sezione trasversale la quota piezometrica sarà dunque costante; questo fatto ci consente di considerare un'unica linea piezometrica per l'intera corrente; adotteremo per essa, convenzionalmente, quella che corrisponde alla traiettoria assiale, cioè la traiettoria passante per i baricentri delle successive sezioni trasversali. Alla stessa stregua considereremo un'unica linea dei carichi totale della corrente, sovrastante la piezometrica, in ogni suo punto, di $V^2/2g$, essendo V la velocità media nella corrispondente sezione trasversale.

Nella figura seguente è stata assegnata la linea dei carichi totali, orizzontale a norma del teorema di Bernoulli, e la linea piezometrica della corrente che percorre la tubazione; quest'ultima si mantiene orizzontale anche nei tronchi cilindrici, in ciascuno dei quali è costante la velocità e quindi l'altezza cinetica; nei convergenti invece, dove la corrente accelera, la linea piezometrica si abbassa, allontanandosi progressivamente dalla linea dei carichi totali.

Applicando il teorema di Bernoulli fra le sezioni estreme A e B del convergente, otteniamo subito dislivello δ fra le quote piezometriche:



$$\delta = \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g}$$

Lo stesso δ può esser dedotto dall'indicazione di un manometro differenziale inserito fra i due sezioni: detto Δ il dislivello fra i menischi del manometro, si sa infatti che:

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

Pertanto si ha:

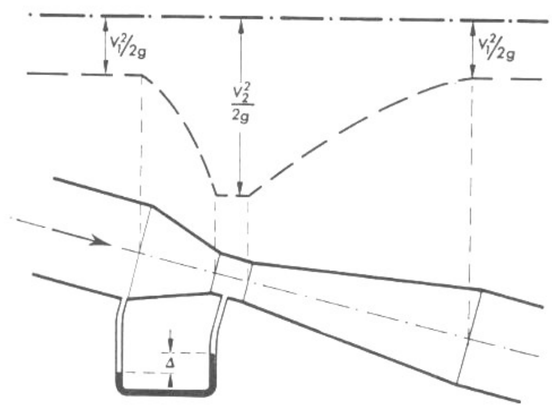
$$\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g}$$

Le due velocità medie V_A e V_B sono legate fra di loro dell'equazione di continuità:

$$Q = V_B A_B = V_A A_A = \text{costante}$$

avendo indicato con A_A e A_B le aree delle due sezioni estreme del convergente. Esprimendo in funzione della portata si ha dunque:

$$\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_A^2} - \frac{1}{A_B^2} \right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Rightarrow Q = \frac{A_A \cdot A_B}{\sqrt{A_A^2 - A_B^2}} \sqrt{2g\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}} = K\sqrt{\Delta}$$



Il dispositivo consente dunque di determinare la portata di una corrente in pressione a mezzo di una semplice lettura manometrica. Proprio sul principio di funzionamento ora esposto è basato un apparecchio di misura delle portate largamente diffuso, proposto verso la metà del secolo scorso dall'americano Hershell e da lui denominato Venturimetro in onore dell'idraulico italiano Venturi che, verso la fine del settecento, si occupò diffusamente di questioni riguardanti appunto la trasformazione dell'energia di un fluido dalla forma potenziale alla cinetica. Lo abbiamo schematicamente indicato nella figura che segue;come si vede, oltre al convergente, esso comprende un breve tronco cilindrico di sezione ristretta e poi un divergente, avente solo scopo di riportare il diametro al suo originario valore e quindi di consentire l'inserimento dell'apparecchio in una condotta a sezione costante. Se non occorre una approssimazione molto spinta la portata può senz'altro essere determinata a mezzo dell'equazione vista in precedenza; conglobando in un'unica costante K tutte le grandezze geometriche fisiche note essa si può scrivere semplicemente:

$$K = \frac{A_A \cdot A_B}{\sqrt{A_A^2 - A_B^2}} \sqrt{2g \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$

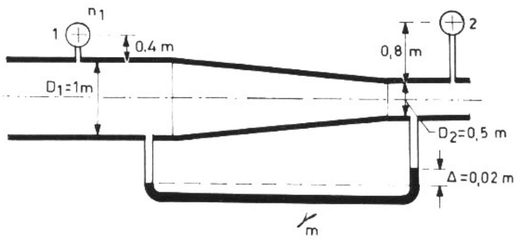
L'errore da cui è affetta questa formula è dovuto alle ipotesi semplificatrici introdotte nella deduzione del teorema di Bernoulli (fluido perfetto) e nella estensione che qui ne é stata fatta alle correnti di sezione finita e dipende in qualche misura anche da dettagli costruttivi dell'apparecchio. Volendo maggiore precisione, per esempio per misure di laboratorio, è necessaria l'introduzione di un coefficiente correttivo, leggermente variabile con la portata e determinabile soltanto mezzo di apposita taratura. Nella figura è stata segnata la linea dei carichi totali e la piezometrica, come risultano dalla semplice applicazione del teorema di Bernoulli. Ma occorre mettere in guardia sul fatto che lo schema è accettabile, in via approssimata, per il tronco convergente, dove i fatti dissipativi sono effettivamente modesti; non lo è per nulla per il successivo tronco divergente, dove la perdita di energia meccanica è in ogni caso non trascurabile. Sarebbe pertanto del tutto inaccettabile l'inserzione del manometro differenziale fra le sezioni estreme del divergente, anche se questo, come di norma avviene, viene disegnato con cura lo scopo di ridurre al minimo le inevitabili dissipazioni. Qualora non ci si debba preoccupare di tali dissipazioni, il divergente, che per la sua lunghezza è piuttosto ingombrante e costoso, può essere accorciato o addirittura soppresso, consentendo una brusca ri-espansione della corrente.
Il Venturimetro è un parecchio pregevole, il cui solo inconveniente, ai fini applicativi, consiste proprio nell' ingombro, spesso proibitivo. Per questa ragione sono stati studiati altri dispositivi meno ingombranti, oggi pure largamente impiegati, ai quali dedichiamo qui solo un breve accenno: essi sono illustrati in figura e sono i diaframmi e boccagli. Il principio di funzionamento lo stesso del venturimetro: si tratta in ogni caso di costringere la corrente a passare per una sezione ristretta, strozzata (per questi i dispositivi sono anche detti a strozzamento), in guisa di provocare un incremento di altezza cinetica a spese della quota piezometrica.

L'abbassamento della quota piezometrica viene misurato a mezzo di un manometro differenziale opportunamente inserito e da esso si deduce la portata a mezzo di una forma del tipo di quella vista dove però compaiono in ogni caso coefficienti empirici da determinare a mezzo di taratura.
Per l’esercizio in esame si ricava:

$A_A = 0.2\ m^2$
$A_B = 0.096\ m^2$
$K=1.49$
$Q=0.67\ m^3/s$

La velocità nella tubazione, prima del venturimetro, risulta inoltre pari a 3.4 m/s.

Esercizio 2 – Venturimetro (2)
Note le dimensioni della tubazione in figura, l'indicazione del manometro metallico 1 (n_1=*2 bar*) e di quello differenziale Δ (γ=*9806 N/m*^{3}, γ_m=*133362 N/m*^{3}), si determini: la portata *Q* che defluisce nella tubazione e l'indicazione n_2 del manometro metallico 2.



Soluzione
Per trovare la portata si utilizzi l'equazione del venturimetro:

$$Q = \frac{A_1 \cdot A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}} = K\sqrt{\Delta}$$

dove A_1= 0.79 m^2, e A_2 =0.196 m^2. La portata risulta quindi pari a 0.45 m^3/s.

Per trovare l'indicazione del manometro metallico n_2 si applichi il teorema di Bernoulli fra le due sezioni corrispondenti ai due manometri metallici:

$$z_1 + \frac{n_1 \cdot 10^5}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gA_1^2} = z_2 + \frac{n_2 \cdot 10^5}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gA_2^2} \Rightarrow n_2 = 1.96 \text{ bar}$$

Esercizio 3 – Getto da un boccaglio inclinato
Nella figura è rappresentato un boccaglio. Ammesso il liquido perfetto (γ*=9806 N/m*[3]) e trascurabile la resistenza dell'aria, si determini: la portata effluente quando la pressione in *n* è pari a *1 bar* e la massima quota *h* raggiunta dal getto nel caso in cui l'angolo *α* sia pari a *30°*.

Soluzione
Quesito n°1: la portata può essere determinata applicando il teorema di Bernoulli fra la sezione 1-1 e la sezione 2-2 di sbocco:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Si ha poi che:

$$z_2 - z_1 = a = 2\text{m}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{1 \cdot 10^5}{9086} = = 11 \text{ m}$$

$$p_2 = 0$$

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Pertanto risulta:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2\right] \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2g\left(z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\gamma}\right)A_1^2 A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}}$$

dove: $A_1 = 0.0177 \text{ m}^2$
$A_2 = 0.00196 \text{ m}^2$

La portata all'uscita vale pertanto $Q = 0.026 \text{ m}^3/\text{s} = 26$ l/s, mentre le velocità valgono $V_1 = 1.48$ m/s e $V_2 = 13.37$ m/s.

Quesito n°2: la massima quota h raggiunta dal getto per α =30° si ottiene applicando il teorema di Bernoulli fra la sezione di sbocco e quella massima raggiunta dal getto in cui la pressione è ancora nulla e la velocità si riduce alla sua componente orizzontale $V_0 = V_2 \cos\alpha$:

$$z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = (z_2 + h) + \frac{v_2^2 \cos^2\alpha}{2g} \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g}\left(1 - \cos^2\alpha\right) = \frac{13.37^2}{2 \cdot 9.806}(1 - 0.75) = 2.28 \text{ m}$$

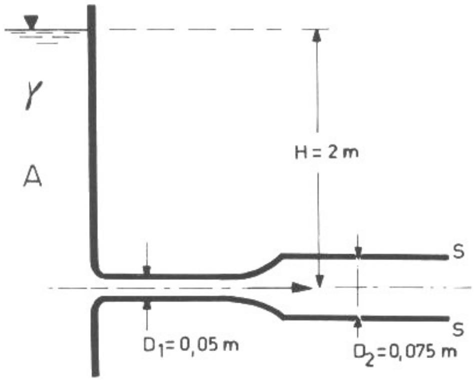
\

Esercizio 4 – Portata attraverso un tronco di tubazione

Nel sistema in figura defluisce un liquido perfetto (γ*=9806 Nm*$^{-3}$). Si determini la portata *Q* effluente e la pressione relativa *p1* lungo l'asse del primo tronco di tubazione.

Soluzione

Assumendo come piano di riferimento per le z quello contenente l'asse della tubazione, si applichi l'equazione di Bernoulli fra il pelo libero del liquido (a pressione e velocità nulla) e la sezione di sbocco (a pressione nulla e quota nulla):



$$z_A = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9.806} = 6.26 \text{ m/s}$$

La portata di efflusso vale quindi:

$$Q = v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 2.77\ 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

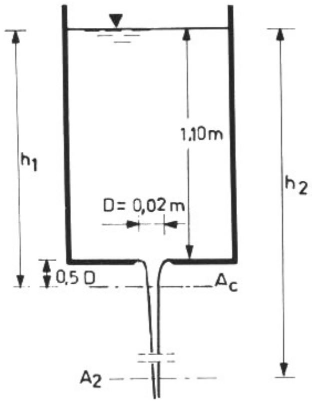
Applicando nuovamente l'equazione di Bernoulli fra la superficie libera del serbatoio e una sezione nel primo tronco di tubazione, si ha:

$$z_A = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow p_1 = \gamma\left(z_A - \frac{v_1^2}{2g}\right) = -79652 \text{ Pa}$$ (essendo la $v_1 = 4Q/(\pi D_1^2) = 14.09$ m/s)

Esercizio 5 – Getto verticale da un serbatoio

Sul fondo del serbatoio indicato in figura è praticata una luce in parete sottile avente diametro *D=0.02 m*. Si calcoli a quale distanza dalla luce il getto ha un diametro *D_2=0.012 m* (il coefficiente di contrazione della vena fluida è pari a *0.61*).

Soluzione



Le linee di corrente del getto si dispongono praticamente parallele nella sezione contratta di area:

$$A_C = C_C \frac{\pi D^2}{4}$$

situata ad una distanza pari a 0.5 diametri dal foro. In tale sezione il carico risuta h_1=1.1+0.5x0.02=1.11 m e la velocità V_1= $\sqrt{2gh_1} =$4.66 m/s. La portata è dunque:

$$Q = C_C \frac{\pi D_1^2}{4} \cdot V_1$$

Nella sezione A2, dove il diametro è quello richiesto d2=0.012 m, la velocità è V_2= $\sqrt{2gh_2}$ e la portata:

$$Q = \frac{\pi D_2^2}{4} \cdot V_2$$

Eguagliando le due espressione, valendo la conservazione della portata, si ha:

$$C_C \frac{\pi D_1^2}{4} \cdot V_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} \cdot \sqrt{2gh_2}$$

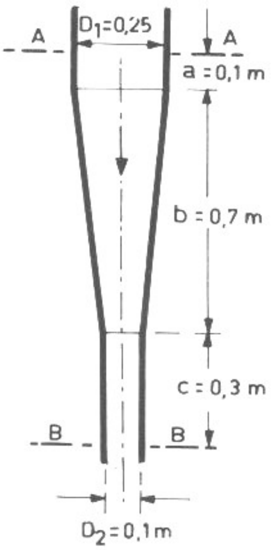
da cui si ricava la quota h_2:

$$h_2 = C_c^2 \frac{D_1^4}{D_2^4} \frac{V_1^2}{2g} = \text{3.18 m}$$

cioè il diametro pari a 0.012 m si stabilisce a 2.09 m sotto il foro.

Esercizio 6 – Condotta ad asse verticale

Un liquido perfetto (*γ=8825 Nm^{-3}*) defluisce nella condotta ad asse verticale indicata in figura. Essendo *Q=60 l s^{-1}* la portata, calcolare la differenza fra le pressioni nelle sezioni *A-A* e *B-B*.



Soluzione

Si cominci con il determinare la distanza fra la due sezioni: essa in valore assoluto vale 0.7+0.10+0.3=1.1 m.

L'equazione di Bernoulli ci assicura, essendo il liquido perfetto e perciò privo di attriti, che:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

La differenza di pressione fra le due sezioni è quindi data da:

$$p_A - p_B = \gamma\left(z_B - z_A + \frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g}\right)$$

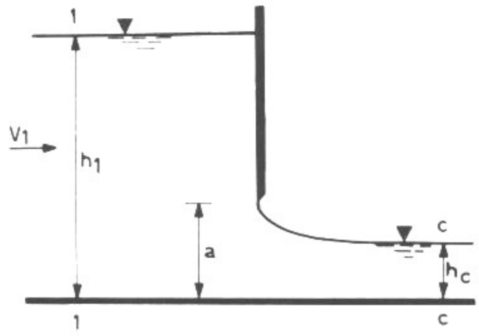
Al fine di valutare le velocità nelle due sezioni si ricorre alla portata volumetrica, che è legata alle velocità medie come segue:

$$Q = v \cdot sez = v \cdot \frac{\pi D_T^2}{4}$$ (dove D_T è il diametro del tubo)

Le velocità nelle due sezioni valgono quindi rispettivamente v_A= 1.22 m/s e v_B = 7.63 m/s. Il salto di pressione è quindi pari a:

$$p_A - p_B = 8825(-1.1 + 2.97 - 0.076) = 15832 \text{ Pa}$$

Esercizio 7 – Efflusso da una apertura su parete verticale
Calcolare l'altezza di apertura *'a'* della paratoia a battente in figura larga *L=2 m*, affinchè scarichi una portata $Q = 2.5\ m^3/s$ con un altezza d'acqua h_1 pari a *1 m* ($C_c = 0.61$).



Soluzione
Lo studio dei processi di efflusso attraverso fori aperti nelle pareti dei recipienti ha costituito un tempo un vasto capitolo dell'idraulica applicata: la cosiddetta *Foronomia*. Anche attualmente essi sono tutt'altro privi di importanza, essendo alla base di molti dispositivi impiegati per la misura delle portate liquide. Un foro aperto nella parte o nel fondo di un recipiente si chiama genericamente luce. Si possono distinguere due grandi categorie di luci: le luci a battente, che hanno tutto il loro contorno a quota inferiore a quella del palo liquido nel recipiente, e le luci a stramazzo, o semplicemente stramazzi, che hanno invece soltanto la parte inferiore del loro contorno soggiacente al pelo libero e quindi bagnata dal liquido effluente. La corrente che si origina da una luce è detta getto o vena liquida.
Quando sia ha una luce a battente con spigolo vivo, verso di essa convergono traiettorie che provengono da ogni punto del recipiente; in particolare, quelle che lambiscono il fondo piano arrivano alla luce in direzione orizzontale, mentre quelle lungo la parete scendono verticalmente e sono costrette ad una brusca variazione di direzione per avviarsi all'uscita. Non potendo queste ultime piegarsi immediatamente ad angolo retto, determinano, in uscita dal recipiente, la formazione di una contrazione della vena liquida in uscita rispetto alla sezione disponibile. L'equazione di Bernoulli può anche in questo caso essere applicata in quanto lungo la maggior parte della traiettoria dei filetti liquidi (salvo dove si ha la contrazione), gli sforzi tangenziali, e quindi le dissipazioni, sono modeste. Si può inoltre tenere conto dei fatti dissipativi attraverso un coefficiente di velocità C_V dato dal rapporto fra la velocità di efflusso effettiva e quella determinabile utilizzando il teorema di Bernoulli:

$$C_V = \frac{v_e}{v_B}$$

Le ormai numerosissime prove sperimentali hanno mostrato che, per le luci a spigolo vivo, tale coefficiente vale 0.97-0.99, ponendolo uguale a 1, quindi, si compie dunque un errore di modesta entità.
A questo punto è facile determinare la portata della vena effluente: basta moltiplicare per l'area della sezione contratta A_C. Questa a sua volta può essere espressa in funzione dell'area della luce A a mezzo di un coefficiente di contrazione C_C:

$$C_C = \frac{A_C}{A}$$

Applicando il teorema di Bernoulli alla linea di corrente fra un punto A (pressoché fermo) in seno al fluido contenuto nel serbatoio e la sezione di uscita, si ha:

$$h_1 = z_a + \frac{p_a}{\gamma} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{v_C^2}{2g}$$

L'altezza cinetica in C risulta dunque uguale al dislivello fra i peli dell'acqua nel serbatoio e nella sezione contratta; poichè questo vale per qualsiasi traiettoria, nella sezione contratta la velocità è uniformemente distribuita. Tenendo conto della contrazione della vena fluida si ha inoltre:

$$\frac{v^2}{2g} = h_1 - \left(z_c + \frac{p_c}{\gamma} \right) = h_1 - C_c a$$

La portata di efflusso è quindi pari a:

$$Q = C_C C_V A \sqrt{2g(h_1 - C_C a)} = \mu A \sqrt{2g(h_1 - C_C a)}$$

dove A è l'area della paratoia. Il coefficiente $\mu = C_C C_V$ è denominato coefficiente di efflusso.

Il coefficiente di contrazione è stato determinato teoricamente da Kirchhoff nella seconda metà dell'800, per il caso del moto piano verso una fessura rettangolare di lunghezza infinita, e trovato pari a:

$$C_C = \frac{\pi}{\pi + 2} \cong 0.61$$

Il valore corrispondente del coefficiente di efflusso è pari a circa 0.6.
Assumendo come in questo caso la velocità nulla si otterrebbe a=0.582. Tenendo invece conto della velocità v_1 e applicando il teorema di Bernoulli fra la sezione 1-1 a monte della paratoia e la sezione contratta, si avrebbe:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_C + \frac{v_c^2}{2g}$$

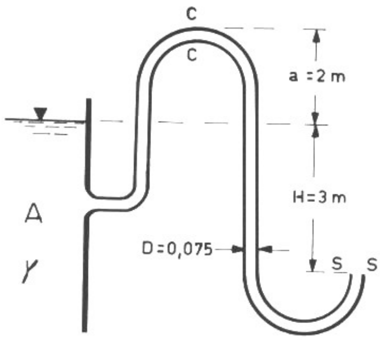
o, in termini di portate:

$$h_1 + \frac{Q^2}{2gh_1^2 L^2} = h_C + \frac{Q^2}{2gh_C^2 L^2}$$

Anche in questo caso l'equazione non è esplicita in h_c e occorre risolverla per tentativi ottenendo h_c=0.325 m. L'altezza della paratoia è data quindi, tenendo conto della coefficiente di contrazione, della vena da:

$$a = \frac{h_c}{C_c} = \frac{0.325}{0.61} = 0.533 \text{ m}$$

Esercizio 8 – Sifone



Nell'ipotesi di liquido perfetto (*γ=8825 N/m^3*), si determini la portata *Q* del sifone in figura. Individuare inoltre il massimo valore della portata scaricabile dal sifone, al variare della quota della sezione di sbocco.

Soluzione

Assunta la sezione di sbocco S-S come riferimento per le altezze geodetiche ed applicando il teorema di Bernoulli fra la superficie libera del serbatoio e la sezione di sbocco del sifone di ottiene:

$$H = 3\text{m} = \frac{V_s^2}{2g}$$

La velocità di efflusso corrispondente alla geometria proposta vale quindi: 7.67 m/s, corrispondente ad una portata di 0.033885 m^3/s cioè circa 33,9 l/s. Abbassando la sezione di sbocco del sifone, la pressione nella sezione C-C si abbassa determinando ulteriore risucchio dal serbatoio. La portata massima scaricabile corrisponderà quindi ad avere pressione assoluta nulla nella sezione C-C (al di sotto non è fisicamente possibile andare e quindi ogni ulteriore abbassamento della sezione S-S non farà aumentare la portata erogata). In corrispondenza ad una pressione assoluta nulla, si avrà quindi una pressione relativa pari a –101300 Pa. Applicando il teorema di Bernoulli fra il pelo libero nel serbatoio e la sezione C-C, si ha:

$$z_A = z_c + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_{max}^2}{2g} \Rightarrow V_{max} = \sqrt{2g \cdot \left(z_A - z_c - \frac{p_C}{\gamma} \right)} = \sqrt{2 \cdot 9.806 \left(-2 + \frac{101300}{8825} \right)} = 13.63 \text{ m/s}$$

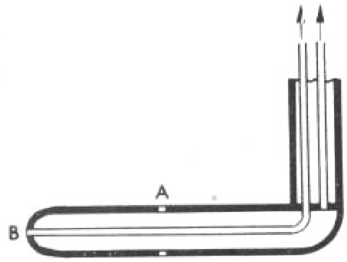
Alla velocità ottenuta corrisponderà una portata massima erogata pari a:

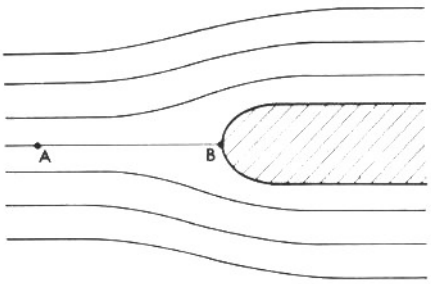
$$Q_{max} = \frac{\pi D^2}{4} V_{max} = \frac{3.1416 \cdot 0.075^2}{4} 13.63 = 0.06 \text{ m}^3\text{/s} = 60 \text{ l/s}$$

In tali condizioni limite risulta, essendo $V_{max} = \sqrt{2gH}$, H=9.48 m.

Esercizio 9 – Tubo di Pitot
Dato il sistema in figura (Tubo di Pitot), si determini la velocità della corrente sapendo che il dislivello della presa statica e della presa dinamica è pari a 5 cm.

Soluzione
Il tubo di Pitot è un dispositivo, inventato dal francese Pitot nel '700, che trova ancora oggi largo impiego per misure locali di velocità nelle correnti fluide. Per comprenderne il funzionamento, consideriamo una corrente che investe un ostacolo, costituito da un corpo di rivoluzione a testa tondeggiante: la corrente, si veda la figura che segue, a sufficiente distanza a monte dell'ostacolo, abbia traiettorie rettilinee e parallele, e l'asse di simmetria dell'ostacolo abbia la loro direzione. Avvicinandosi all'ostacolo le traiettorie divergono per poterlo aggirare; in particolare la traiettoria AB di disposta sul prolungamento dell'asse del corpo, per ovvie ragioni di simmetria, dopo averlo investito nel punto B di prua, si suddivide in infinite traiettorie che ne lambiscono la parete lungo le linee meridiane. Nel punto B si ha una brusca deviazione ad angolo retto: si dimostra che in simili circostanze il modulo della velocità va a zero, sicché il punto B viene detto d'arresto o di ristagno.





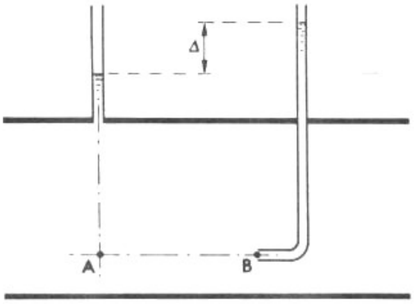
Se il punto A è sufficientemente lontano perché la corrente vi si possa ritenere indisturbata (bastano pochi diametri della sezione dell'ostacolo), il teorema di Bernoulli, applicato alla traiettoria AB, ci dà pertanto:

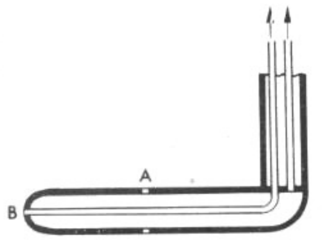
$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

e di qui, quando sia nota la differenza di quota piezometrica fra i due punti, possiamo ricavare la velocità in A.
Nella figura che segue è rappresentata una corrente uniforme in un tubo. La quota piezometrica nella sezione dove si trova il punto A (dove la pressione è distribuita ancora idrostaticamente) può essere individuata a mezzo di un comune piezometro; quella del punto B di prua del corpo di rotazione aprendo in esso un forellino, collegato pure con un piezometro; si noti che dentro di questo il liquido è in quiete, sicché la presenza del foro non impedisce la brusca deviazione delle traiettorie è quindi l'annullamento della velocità. Detto delta il dislivello fra i menischi nei piezometri, si ha immediatamente:

$$v_A = \sqrt{2g\Delta}$$

In pratica i due tubi piezometrici possono essere incorporati in un unico apparecchio, che nei dettagli può avere diverse forme (la più nota è dovuta a Prandtl), e che viene detto tubo di tipo di Pitot o pitometro. La presa di pressione, che possiamo chiamare statica, è di norma realizzata a mezzo di una fessura aperta lungo un parallelo del corpo di rotazione, a distanza sufficiente dal punto di prua (dove c'è la presa dinamica) perché le traiettorie radenti abbiano riacquistato l'originaria direzione. Il diametro del corpo è tenuto assai modesto (dell'ordine di mezzo centimetro) per non disturbare troppo la corrente, in guisa che la quota piezometrica in corrispondenza della fessura A si possa ritenere praticamente coincidente con quella esistente poco monte dell'ostacolo; il corpo è cavo e al suo interno corrono i due tubicini che faranno capo alle canne piezometriche o alle due canne di un manometro differenziale.

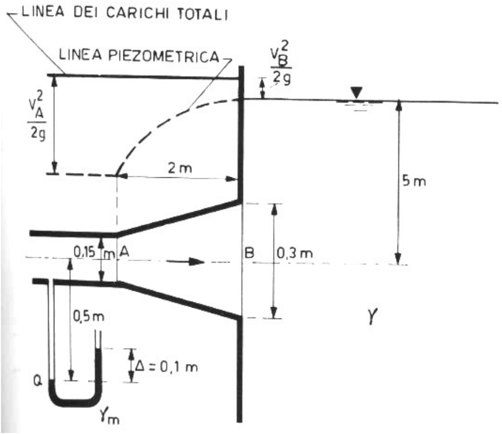




Il modello di Prandtl, in particolare, dà errori nella velocità ancora trascurabili quando l'asse del dispositivo formi un angolo non piccolissimo con la direzione della corrente (fino a 10°), il che ne agevola ovviamente l'impiego. Il tubo di Pitot è largamente usato per misure di velocità locali non piccolissime: questa limitazione deriva dalla constatazione che già per la velocità di 1 m/s l'altezza cinetica, e quindi il dislivello manometrico da leggere, è dell'ordine di soli 5 cm; essa diminuisce inoltre col quadrato della velocità, sicché gli errori percentuali di valutazione del dislivello diventano rapidamente inaccettabili a diminuire di v.

La velocità, nel caso esaminato risulta appunto pari a circa 1 m/s.

Esercizio 10 – Portata effluente da un serbatoio
Con i dati riportati in figura, determinare la portata effluente Q e tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica (γ = 9806 N/m^3, γ_m = 133362 N/m^3).



Soluzione
Si applichi il teorema di Bernoulli fra le sezioni A e B:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

Si osserva ora che:

- Dalla lettura del manometro, che è aperto e in comunicazione con l'aria esterna (a pressione relativa nulla):

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{\Delta\gamma_m - 0.5\gamma}{\gamma} = 0.86 \text{ m}$$

- $\frac{p_B}{\gamma} = 5$ m
- $z_A = z_B$

Inoltre: $V_A = \frac{Q}{A_A}$ e $V_B = \frac{Q}{A_B}$

Dove: Q = portata volumetrica
A_A = sezione della condotta in corrispondenza ad A
A_B = sezione della condotta in corrispondenza ad B

Le sezioni valgono:

A_A = 0.0177 m^2
A_B = 0.071 m^2

Si ricava pertanto:

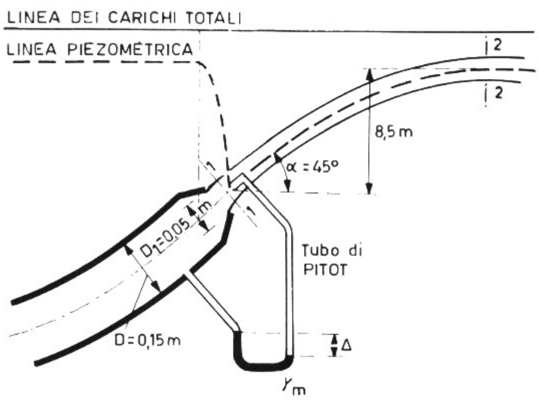
$$Q=\sqrt{\frac{\left(\frac{p_B}{\gamma}-\frac{p_A}{\gamma}\right)2g}{\frac{1}{A_A^2}-\frac{1}{A_B^2}}}=\sqrt{\frac{4.14\cdot 2g}{2993.56}}=0.165\ m^3/s$$

La linea dei carichi totali e la piezometrica sono riportate in figura.

Esercizio 11 – Moto di un fluido in un condotto

Conoscendo le dimensioni del condotto, il coefficiente di contrazione C_c = 0.85 dell'ugello e la massima quota cui arriva il getto d'acqua in figura (γ = 9806 N/m^3, γ_m = 133362 N/m^3), si determini:

1. la portata Q effluente;
2. l'indicazione Δ del manometro differenziale
3. la linea dei carichi totali e la piezometrica



Soluzione

1) Si scriva l'equazione di Bernoulli fra la sezione 1 e la sezione 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Si osserva ora che:

p_1=p_2=0

V_2 = $V_1\cos\alpha$

z_2-z_1= 8.5 m

pertanto si ottiene:

$$\frac{V_1^2}{2g}\left(1-\cos\alpha^2\right)=8.5 \Rightarrow V_1 = 18.6 \text{ m/s}$$

la portata Q effluente vale dunque:

$$Q = V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} C_c = 30.47 \text{ l/s}$$

2) applicando il Teorema di Bernoulli sull'asse del condotto fra la sezione interna del condotto dove è inserito il manometro e la sezione di sbocco dove è inserito il tubo di Pitot (indicata con m):

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{v_m^2}{2g}$$

La velocità in corrispondenza del tubo di Pitot è nulla, pertanto si ha, chiamando δ la differenza di quota piezometrica, e ricordando che la portata volumetrica si conserva:

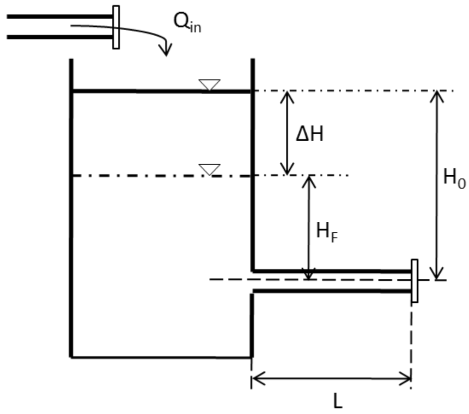
$$\frac{v^2}{2g} = \frac{Q^2}{A^2 2g} = \left(z_m + \frac{p_m}{\gamma} \right) - \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = \delta$$

La sezione A del condotto vale: A= $\frac{\pi D^2}{4}$ 0.0177 m^2, si ha quindi δ=0.151 m e utilizzando le formule che legano δ a Δ per i manometri differenziali:

$$\Delta = \delta \frac{\gamma}{\gamma_m - \gamma} = 0.012 \text{ m}$$

c) La linea dei carichi totali, essendo il liquido perfetto, è una linea orizzontale. La piezometrica ha l’andamento segnato in figura.

Esercizio 12 –Dinamica di un serbatoio



Il serbatoio a sezione quadrata (con lato *a=1m*) disegnato in figura è alimentato con una portata di acqua costante nel tempo e pari a Q_{in}*=10 l/min*. Il serbatoio è dotato di una tubazione di scarico di diametro interno pari a *d=1 cm* e lunghezza *L=30 cm*. Sapendo che all'istante iniziale (*t=0*) l'altezza dell'acqua all'interno del serbatoio (rispetto alla tubazione) è pari a H_0*=3 m*, si chiede di determinare:

a. il livello di acqua raggiunto nelle condizioni di regime;
b. il tempo necessario per provocare l'abbassamento del livello di acqua di una quantità pari a *ΔH=1 m*.

Si consideri il fluido perfetto.

Soluzione

$Parte\, a.$

$$A_S \frac{dH}{dt} = Q_{in} - A_T \sqrt{2g} H^{1/2}$$

$$H_\infty = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{in}}{A_T}\right)^2$$

$$H_\infty = 0.229\, m$$

$Parte\, b.$

$$\frac{dH}{H^{1/2} - \beta} = -\alpha dt$$

$$\alpha = \frac{A_T \sqrt{2g}}{A_S}$$

$$\beta = \frac{Q_{in}}{A_S \alpha}$$

$$t = \left[\frac{2\beta \ln\left(\sqrt{H} - \beta\right) + 2\sqrt{H}}{-\alpha}\right]_{H_0}^{H_0 - \Delta H}$$

$$t = 2633\, s$$