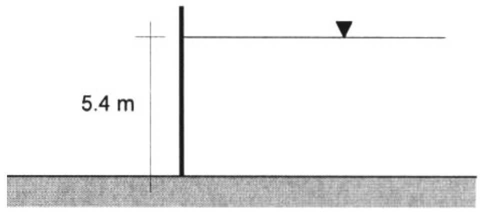
Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 3 - 22 Ottobre 2015

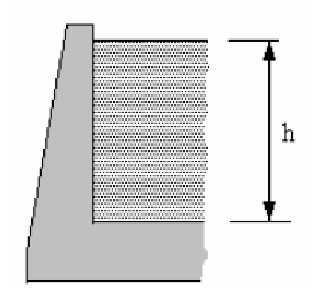
Calcolo delle Spinte

Esercizio 1 – Spinta su un piano verticale
Nella figura a fianco è rappresentata una paratoia piana verticale sulla quale si esercita la spinta di un liquido omogeneo (*ρ=1000 kg/m³*). Sulla base dei dati riportati si tracci il diagramma delle pressioni e si calcoli la spinta per unità di lunghezza della paratoia, nonché il centro di spinta.

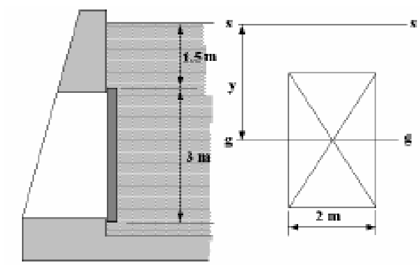


Esercizio 2 – Pressione e forza sul fondo di un serbatoio
Si calcoli la pressione e la forza esercitate sul fondo di un serbatoio circolare di diametro pari a 0.75 m, quando quest'ultimo è riempito con un olio di densità *875 kg/m³* per un'altezza di *7 m*.

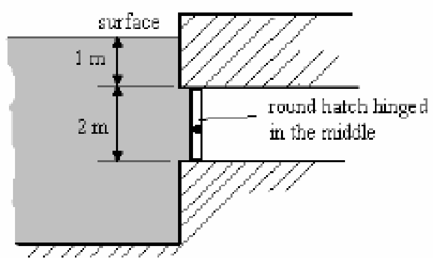
Esercizio 3 – Spinta su una superficie piana verticale
Si dimostri che il centro di spinta su un muro verticale come quello disegnato in figura si trova a *2/3* dell'altezza dello stesso. Si dimostri quindi che il momento (valutato rispetto al lato inferiore) esercitato dal fluido sulla stessa parete è pari a $\rho g h^3 / 6$ per unità di larghezza.



Esercizio 4 – Spinta su un portello rettangolare
Il muro in cemento armato disegnato in figura è dotato di un portello rettangolare di acciaio. Si chiede di determinare la forza esercitata dal fluido sul portello, il suo centro di spinta e il corrispondente momento torcente valutato rispetto al punto più basso del portello. Si assuma che il fluido abbia una densità di *1 g/cm³*.

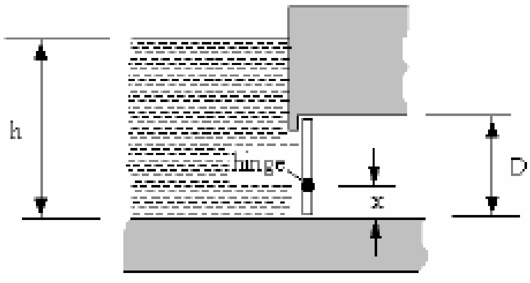


Esercizio 5 – Spinta su un disco circolare
Si determini la forza da applicare sul punto più alto del disco circolare riportato in figura per garantire una perfetta chiusura del canale. Si assuma una densità del fluido pari a 1*030 kg/m³*. Si tenga conto che il disco è in grado di ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro.



Esercizio 6 – Spinta su un disco circolare

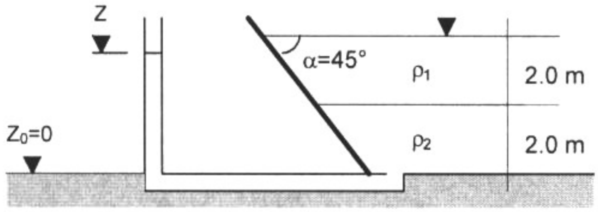
Il disegno riportato a lato mostra un portello circolare di diametro D incernierato su un asse (a distanza x dalla base inferiore), in grado di ruotare quando il livello dell'acqua raggiunge un livello massimo h (così da garantire lo svuotamento del serbatoio e il mantenimento del livello massimo stesso).



a. Si dimostri che perché questo accada la posizione della cerniera deve essere pari a: $x = \frac{D}{2}\frac{8h-5D}{8h-4D}$.
b. Sapendo che il diametro è pari a 0.60 m, si determini quindi la posizione della cerniera in grado di garantire un livello massimo di 4 m.

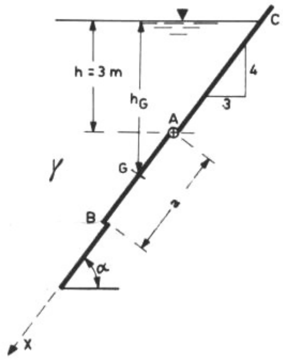
Esercizio 7 – Spinta su una parete inclinata

In figura è rappresentata una paratoia piana inclinata, sulla quale due liquidi sovrapposti (*ρ_1 = 900 kg/m^3*, *ρ_2 = 1000 kg/m^3*) esercitano la loro spinta. Sulla base dei dati riportati in figura si tracci il diagramma delle pressioni e si calcoli la spinta per unità di lunghezza della paratoia, nonchè il centro di spinta. Inoltre, si determini la quota (*z*) del piano dei carichi idrostatici raggiunta dal liquido (*ρ_2 = 1000 kg/m^3*) nel piezometro riportato in figura.



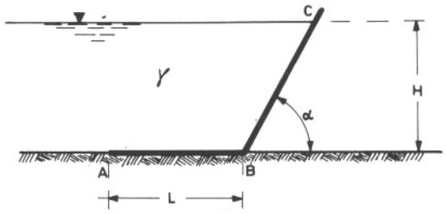
Esercizio 8 – Paratoia

La paratoia piana *AB* quadrata con lato *a=2.5 m*, incernierata in *A* e appoggiata in *B*, è a contatto con acqua (*γ=9806 N/m^3*). Supposto trascurabile il peso proprio della paratoia, determinare la forza ***F*** che si scarica sull'appoggio *B* ed il momento ***M*** necessario per iniziare l'apertura della paratoia.



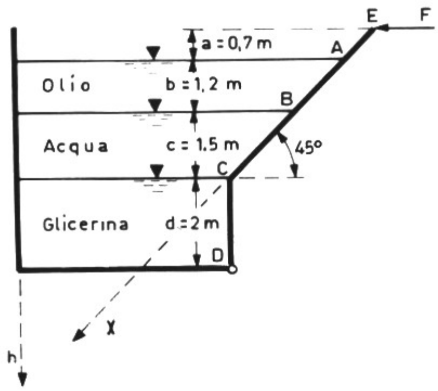
Esercizio 9 – Parete inclinata

Uno sbarramento è costituito da un elemento a forma di diedro, la cui base orizzontale di traccia *AB* è appoggiata sul terreno, con perfetta tenuta in *A*. Ritenuto trascurabile il peso proprio della struttura, determinare la più piccola lunghezza *L* della base *AB* in modo che l'elemento non si ribalti e l'angolo a per cui tale lunghezza è minima.



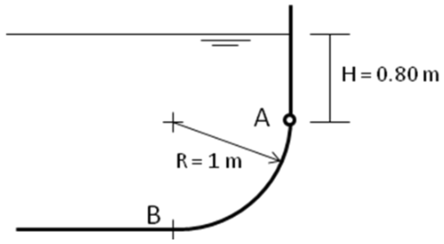
Esercizio 10 – Parete inclinata

Il recipiente prismatico in figura lungo *L=3 m*, contiene olio *(γ_1=8335 N/m^3)*, acqua (*γ_2=9806 N/m^3*) e glicerina (*γ_3=12356 N/m^3*). Determinare la forza orizzontale ***F*** che è necessario applicare al bordo superiore della parete *EABCD*, incernierata alla base, per mantenerla in equilibrio.



Esercizio 11 – Parete curva

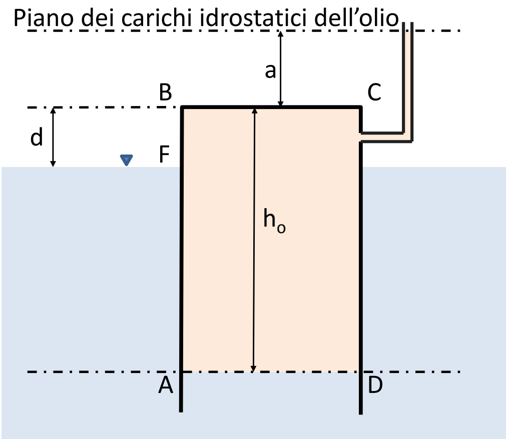
Il recipiente prismatico in figura contiene acqua (γ=9806 N/m^3). Determinare la spinta che si esercita sul tratto curvo AB del recipiente~~, il suo punto di applicazione e il suo momento rispetto alla cerniera A~~.



Esercizio 12 – Serbatoio metallico a campana

In un bacino di acqua (densità r_a = 1000 kg/m^3) galleggia un serbatoio metallico a campana contenente olio (densità r_o = 734 kg/m^3), per un'altezza h_o. Olio e acqua sono a contatto lungo un piano orizzontale *AD*. Il serbatoio ha pianta quadrata di lato *L=7 m* e peso complessivo P_s=490000 *N*. Il serbatoio emerge dall'acqua di un'altezza *d=1 m*.
Assumendo di poter trascurare lo spessore delle pareti del serbatoio, calcolare:

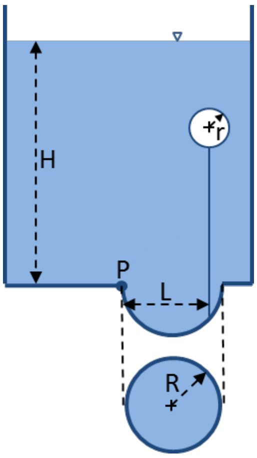
1. La distanza *a* del piano dei carichi idrostatici dell'olio dalla cima del serbatoio.
2. L'altezza dell'olio (h_o) contenuta nel serbatoio
3. Le spinte che acqua e olio esercitano sulle due facce della parete *AB* del serbatoio.
4. L'altezza dell'olio quando l'emersione del serbatoio diviene *d= 2 m*.



Esercizio 13 - Serbatoio

Il serbatoio rappresentato in figura, contiene un liquido fino a un'altezza *H*. Il fondo è chiuso da una porta semisferica di raggio *R*, incernierata nel punto *P*. La chiusura della porta è garantita da un galleggiante sferico di raggio *r*, contenente aria e ancorato in un punto distante *L* dalla cerniera *P*.

1. Se il filo di collegamento del galleggiante non può estendersi e ha peso trascurabile, qual è il raggio minimo del galleggiante perché non fuoriesca il fluido?
2. Se il fluido avesse densità doppia, come cambierebbe il risultato?

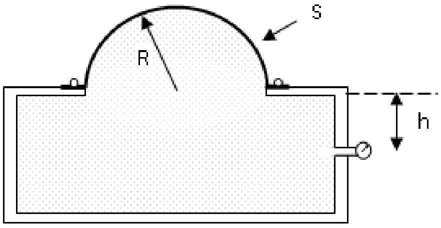


Dati

R = 2 m *H = 3 m* *L =10 m*

Esercizio 14 – Spinta su una calotta sferica

Un serbatoio di benzina *(ρ=0.72 g/cm³)* è chiuso mediante una calotta emisferica di raggio *R=1200 mm*. Il manometro metallico posto a *h=1.5 m* di profondità rispetto alla base del coperchio segna *p=0.56 bar*. Calcolare la forza che agisce sull'anello di chiusura della calotta (cioè la spinta sulla calotta).



Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 3 - 24 Ottobre 2013

Calcolo delle Spinte

Esercizio 1 – Spinta su un piano verticale
Nella figura a fianco è rappresentata una paratoia piana verticale sulla quale si esercita la spinta di un liquido omogeneo (*ρ=1000 kg/m³*). Sulla base dei dati riportati si tracci il diagramma delle pressioni e si calcoli la spinta per unità di lunghezza della paratoia, nonché il centro di spinta.

Soluzione
La spinta sulla paratoia equivale, in modulo, alla pressione calcolata nel baricentro moltiplicata per la superficie per unità di lunghezza (b=A/L=5.4 m). Essendo la paratoia rettangolare. Il suo baricentro giace sull'intersezione della due rette diagonali, pertanto si ha:

$$S = p_0 A = \gamma h_0 b = 9806 \cdot \frac{5.4}{2} \cdot 5.4 = 142971.5 \quad \mathrm{N/m}$$

Allo stesso risultato si perviene calcolando l'area del diagramma della pressioni (area di un triangolo di base □b):

$$S = \gamma b^2/2 = 142971.5 \text{ N/m}$$

Il centro di spinta si trova, rispetto al pelo libero, ad una distanza pari a 3.6 m.

Esercizio 2 – Pressione e forza sul fondo di un serbatoio
Si calcoli la pressione e la forza esercitate sul fondo di un serbatoio circolare di diametro pari a 0.75 m, quando quest'ultimo è riempito con un olio di densità *875 kg/m³* per un'altezza di *7 m*.

Soluzione

Pressione sul fondo del serbatoio:

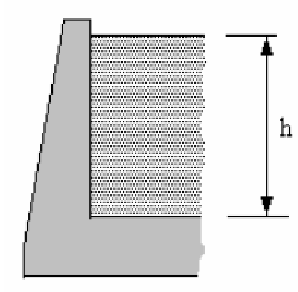
$$p = \rho g H$$

Spinta sul fondo del serbatoio:

$$S = pA = p\frac{\pi}{4}D^2 = \ldots = 26545 \text{ N}$$

Esercizio 3 – Spinta su una superficie piana verticale

Si dimostri che il centro di spinta su un muro verticale come quello disegnato in figura si trova a *2/3* dell'altezza dello stesso. Si dimostri quindi che il momento (valutato rispetto al lato inferiore) esercitato dal fluido sulla stessa parete è pari a $\rho g h^3 / 6$ per unità di larghezza.



Soluzione

$$y_C = \frac{I}{M} = y_G + \frac{I_O}{M} = y_G + \frac{\frac{h^3}{12} l}{h l y_G} = y_G + \frac{\frac{h^2}{12}}{y_G} = y_G + \frac{h^2}{12 y_G}$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

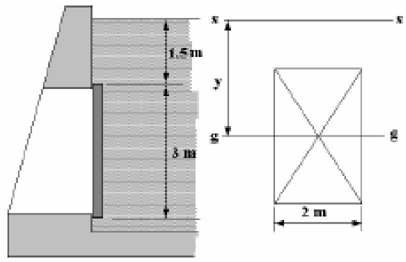
$$y_C = y_G + \frac{h^2}{12 y_G} = \frac{h}{2} + \frac{2h^2}{12h} = \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6h} = \frac{2}{3} h$$

$$S = \gamma y_G A = \gamma \frac{h^2}{2} l$$

$$m = S(h - y_C) = S \frac{h}{3} = \gamma \frac{h^3}{6} l = \rho g \frac{h^3}{6} l$$

Esercizio 4 – Spinta su un portello rettangolare

Il muro in cemento armato disegnato in figura è dotato di un portello rettangolare di acciaio. Si chiede di determinare la forza esercitata dal fluido sul portello, il suo centro di spinta e il corrispondente momento torcente valutato rispetto al punto più basso del portello. Si assuma che il fluido abbia una densità di *1 g/cm³*.



Soluzione

$$h_b = 1.5 + \frac{H}{2} = 3\,m$$

$$F = \rho g A h_b = 176.58\,kN$$

$$M_1 = A h_b = 18\ m^3$$

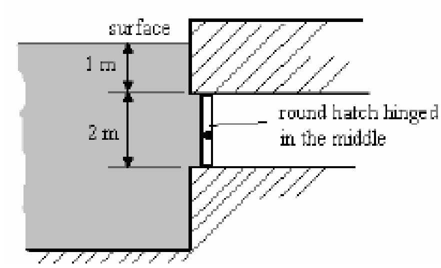
$$M_2 = \frac{bH^3}{12} + A h_b^2 = 58.5\ m^4$$

$$h_{cs} = \frac{M_2}{M_1} = 3.25\,m$$

$$T = F\left(1.5 + H - h_{cs}\right) = 220.72\,kNm$$

Esercizio 5 – Spinta su un disco circolare

Si determini la forza da applicare sul punto più alto del disco circolare riportato in figura per garantire una perfetta chiusura del canale. Si assuma una densità del fluido pari a 1*030 kg/m*^{3}. Si tenga conto che il disco è in grado di ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro.



Soluzione

$$Se = F_{ext}\frac{D}{2}$$

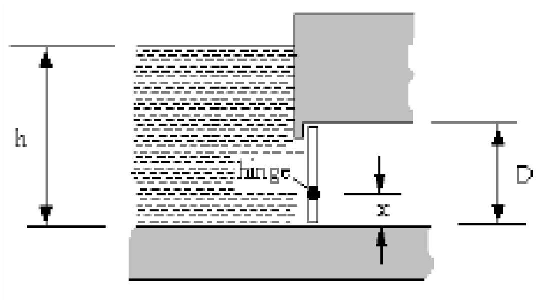
$$e = \frac{I_O}{M} = \cdots = \frac{D^2}{16y_G}$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4}\gamma y_G$$

$$F_{ext} = \frac{\pi D^3}{32}\gamma$$

Esercizio 6 – Spinta su un disco circolare

Il disegno riportato a lato mostra un portello circolare di diametro D incernierato su un asse (a distanza x dalla base inferiore), in grado di ruotare quando il livello dell'acqua raggiunge un livello massimo h (così da garantire lo svuotamento del serbatoio e il mantenimento del livello massimo stesso).



c. Si dimostri che perché questo accada la posizione della cerniera deve essere pari a: $x = \frac{D}{2}\frac{8h-5D}{8h-4D}$.

d. Sapendo che il diametro è pari a 0.60 m, si determini quindi la posizione della cerniera in grado di garantire un livello massimo di 4 m.

Soluzione

$$h_b = h - \frac{D}{2}$$

$$h_{cs} = h - x = \frac{M_1}{M_2}$$

$$M_1 = Ah_b = \pi\frac{D^2}{4}h_b = \pi\frac{D^2}{4}\left(h-\frac{D}{2}\right) = \frac{\pi}{8}(2h-D)D^2$$

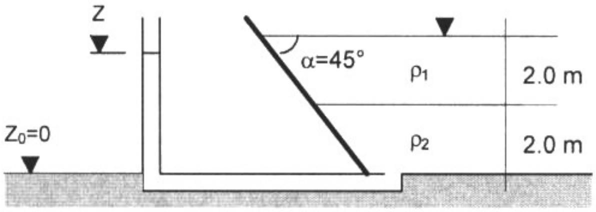
$$M_2 = \frac{\pi D^4}{64} + Ah_b^2 = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^2}{4}\left(h-\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}\left\{\frac{D^2}{16}+\left(h-\frac{D}{2}\right)^2\right\} = \frac{\pi D^2}{4}\left\{\frac{5D^2}{16}-hD+h^2\right\}$$

$$h_{cs} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}\left\{\frac{5D^2}{16}-hD+h^2\right\}}{\frac{\pi}{8}(2h-D)D^2} = 2\frac{\frac{5D^2}{16}-hD+h^2}{2h-D} = \frac{1}{8}\frac{5D^2-16hD+16h^2}{2h-D}$$

$$x == h - h_{cs} = h - \frac{1}{8}\frac{5D^2-16hD+16h^2}{2h-D} = \frac{16h^2-8Dh-5D^2+16hD-16h^2}{8(2h-D)} = \frac{8hD-5D^2}{8(2h-D)} = \frac{D}{2}\frac{8h-5D}{8h-4D}$$

Esercizio 7 – Spinta su una parete inclinata

In figura è rappresentata una paratoia piana inclinata, sulla quale due liquidi sovrapposti (ρ_1 = 900 kg/m^3, ρ_2 = 1000 kg/m^3) esercitano la loro spinta. Sulla base dei dati riportati in figura si tracci il diagramma delle pressioni e si calcoli la spinta per unità di lunghezza della paratoia, nonché il centro di spinta. Inoltre, si determini la quota (*z*) del piano dei carichi idrostatici raggiunta dal liquido (ρ_2 = 1000 kg/m^3) nel piezometro riportato in figura.

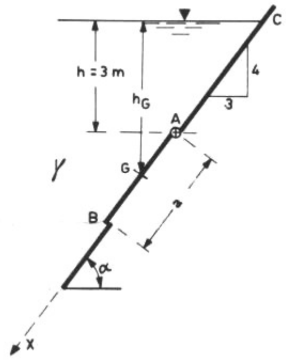


Soluzione

Presentata in classe.

Esercizio 8 – Paratoia

La paratoia piana *AB* quadrata con lato *a=2.5 m*, incernierata in *A* e appoggiata in *B*, è a contatto con acqua (*γ = 9806 N/m³*). Supposto trascurabile il peso proprio della paratoia, determinare la forza ***F*** che si scarica sull'appoggio *B* ed il momento ***M*** necessario per iniziare l'apertura della paratoia.



Soluzione

Si cominci con il valutare l'angolo α di inclinazione della paratoia. Esso è valutabile come arctg del rapporto 4/3, vale pertanto 53.13°. L'affondamento del baricentro della paratoia è quindi dato da:

$$h_G = h + \frac{a}{2}\text{sen}\alpha = 4 \text{ m}$$

La spinta che agisce sulla paratoia ha quindi modulo: $S = \gamma h_G A = 9806 \cdot 4 \cdot 2.5^2 = 245150$ N

Il centro di spinta viene valutato, dal momento di inerzia e dal momento statico del baricentro:

$$I = a \int_{3.75}^{6.25} x^2 dx = 159.5 m^4$$
$$M = x_G A = 4 \cdot 2.5^2 / \text{sen}\alpha = 31.25 m^3$$
$$\xi = 5.104 m$$

Oppure, in maniera del tutto equivalente:

$$M_1 = \xi_G A = \xi_G a^2$$

$$M_2 = \xi_G^2 A + \frac{a}{12} a^3 = \xi_G^2 A + \frac{a^4}{12}$$

$$\xi = \frac{M_2}{M_1}$$

Il momento di S rispetto alla cerniera A, in equilibrio con M per poter iniziare l'apertura della paratoia, vale, in modulo:

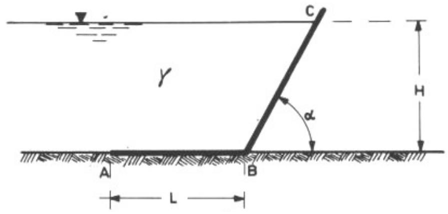
$$S\left(\xi - \overline{AC}\right) = 331933 \text{ N m}$$

mentre la forza F che si scarica sull'appoggio B (reazione vincolare) è determinabile dall'equilibrio dei momenti rispetto ad A:

$$S\left(\xi - \overline{AC}\right) = Fa \Rightarrow F = 132773 \text{ N}$$

Esercizio 9 – Parete inclinata

Uno sbarramento è costituito da un elemento a forma di diedro, la cui base orizzontale di traccia *AB* è appoggiata sul terreno, con perfetta tenuta in *A*. Ritenuto trascurabile il peso proprio della struttura, determinare la più piccola lunghezza *L* della base *AB* in modo che l'elemento non si ribalti e l'angolo a per cui tale lunghezza è minima.



Soluzione

Affinché la struttura non si ribalti, occorre che la spinta complessiva sull'elemento ABC passi al limite per B, vale a dire che sia nullo il momento rispetto a B delle spinte su AB e BC; <u>considerato un elemento di larghezza unitaria</u> la spinta su AB vale in modulo: $S_{AB} = \gamma HL$

Essa è diretta verticalmente verso il basso ed è applicata nel baricentro del lato AB; il suo momento rispetto a B vale perciò:

$$M_1 = S_{AB}\frac{L}{2} = \frac{\gamma HL^2}{2}$$

mentre la spinta su BC (che ha una lunghezza H/senα) vale in modulo:

$$S_{BC} = \gamma\frac{H}{2}\frac{H}{\mathrm{sena}}$$

Il centro di spinta si trova ad 2/3 della lunghezza BC: $\xi = \dfrac{2H}{3\mathrm{sen}\alpha}$

Il suo momento rispetto a B vale quindi:

$$M_1 = S_{BC}\frac{\overline{BC}}{3} = S_{BC}\frac{\xi}{2} = \frac{\gamma H^3}{6\mathrm{sen}^2\alpha}$$

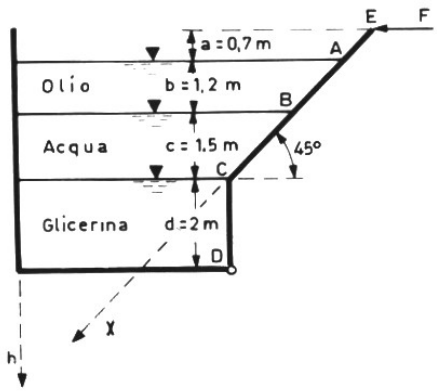
Dall'uguaglianza dei momenti si ottiene:

$$\frac{\gamma HL^2}{2} = \frac{\gamma H^3}{6\mathrm{sen}^2\alpha} \Rightarrow L = \frac{H}{\sqrt{3}\mathrm{sen}\alpha}$$

La minima lunghezza è quella per il quale è massimo senα, cioè quando α=90°.

Esercizio 10 – Parete inclinata

Il recipiente prismatico in figura lungo *L=3 m*, contiene olio (γ_1=8335 N/m^3), acqua (γ_2=9806 N/m^3) e glicerina (γ_3=12356 N/m^3). Determinare la forza orizzontale ***F*** che è necessario applicare al bordo superiore della parete *EABCD*, incernierata alla base, per manternerla in equilibrio.

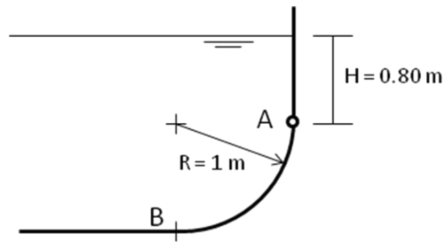


Soluzione

Presentata in classe.

Esercizio 11 – Parete curva

Il recipiente prismatico in figura contiene acqua (*γ=9806 N/m*^{3}). Determinare la spinta che si esercita sul tratto curvo AB del recipiente~~, il suo punto di applicazione e il suo momento rispetto alla cerniera A~~.



Soluzione

Presentata in classe.

$$S_X = \gamma \left(H + \frac{R}{2}\right) R$$

$$S_Y = \gamma H R + \gamma \frac{\pi R^2}{4}$$

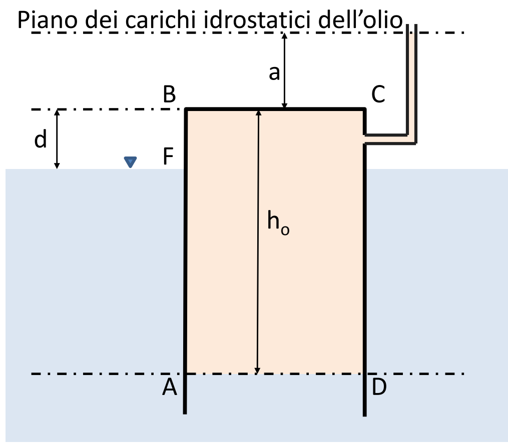
$$S = \sqrt{S_X^2 + S_Y^2}$$

$$cos\alpha = \frac{S_X}{S}$$

Esercizio 12 – Serbatoio metallico a campana

In un bacino di acqua (densità $r_a = 1000\ kg/m^3$) galleggia un serbatoio metallico a campana contenente olio (densità $r_o = 734\ kg/m^3$), per un'altezza h_o. Olio e acqua sono a contatto lungo un piano orizzontale *AD*. Il serbatoio ha pianta quadrata di lato $L=7\ m$ e peso complessivo $P_s=490000\ N$. Il serbatoio emerge dall'acqua di un'altezza $d=1\ m$. Assumendo di poter trascurare lo spessore delle pareti del serbatoio, calcolare:

5. La distanza *a* del piano dei carichi idrostatici dell'olio dalla cima del serbatoio.
6. L'altezza dell'olio (h_o) contenuta nel serbatoio
7. Le spinte che acqua e olio esercitano sulle due facce della parete *AB* del serbatoio.
8. L'altezza dell'olio quando l'emersione del serbatoio diviene $d= 2\ m$.



Soluzione

a. Il piano dei carichi idrostatici è determinato dall'equilibrio tra il peso del serbatoio e la spinta S1 che l'olio esercita sul piano superiore della campana (BC):

$$P_S = p_{top} A_S = a\gamma_o L^2 \tag{1}$$

$$a = \frac{P_S}{\gamma_o L^2} \tag{2}$$

b. Sul piano AD olio e acqua esercitano la stessa pressione p2. Uguagliando le pressioni come affondamenti sotto i rispettivi piani idrostatici:

$$(h_o - d)\gamma_a = (h_o + a)\gamma_o \tag{3}$$

$$h_o = \frac{\gamma_a d + \gamma_o a}{\gamma_a - \gamma_o} \tag{4}$$

c. Le spinte si ricavano dalla pressione nei baricentri:

$$p_a^{bar} = \gamma_a \frac{h_o - d}{2} \tag{5}$$

$$S_a = p_a^{bar} A = p_a^{bar} L(h_o - d) \tag{6}$$

$$p_o^{bar} = \gamma_o \left(\frac{h_o}{2} + a\right) \tag{7}$$

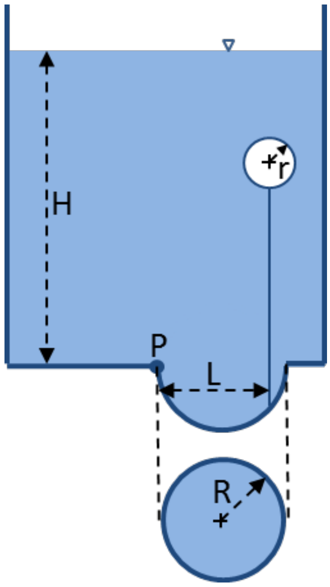
$$S_o = p_o^{bar} A = p_o^{bar} L h_o \tag{8}$$

d. l'aumento dell'emersione della campana è accompagnato da un abbassamento del piano di contatto tra olio e acqua :

$$h_o = \frac{\gamma_a d + \gamma_o a}{\gamma_a - \gamma_o} \tag{9}$$

Esercizio 13 - Serbatoio

Il serbatoio rappresentato in figura, contiene un liquido fino a un'altezza *H*. Il fondo è chiuso da una porta semisferica di raggio *R*, incernierata nel punto *P*. La chiusura della porta è garantita da un galleggiante sferico di raggio *r*, contenente aria e ancorato in un punto distante *L* dalla cerniera *P*.



3. Se il filo di collegamento del galleggiante non può estendersi e ha peso trascurabile, qual è il raggio minimo del galleggiante perché non fuoriesca il fluido?
4. Se il fluido avesse densità doppia, come cambierebbe il risultato?

Dati

R = 2 m
H = 3 m
L =10 m

Soluzione

Volume porta semisferica: $V_p = \frac{2}{3}\pi R^3$

Volume cilindro poggiante sulla semisfera $V_{cyl} = \pi R^2 H$

Volume totale liquido sovrastante: $V_{tot} = V_{cyl} + V_p$

Peso totale liquido sovrastante: $P_{tot} = V_{tot} g \rho$

Momento del peso totale sulla cerniera: $M_{tot} = P_{tot} R$

Spinta di Archimede sul galleggiante: $S_g = \rho g \frac{4}{3}\pi r^3$

Affinché la porta stia chiusa occorre che il momento del liquido uguagli quello del galleggiante:

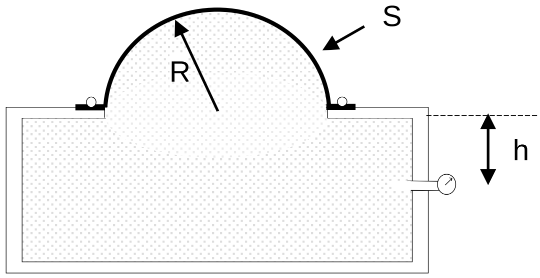
$M_g = S_g L = M_{tot}$

Da cui:

$r = \sqrt[3]{\frac{M_{tot}}{\rho g \frac{4}{3}\pi L}} = \sqrt[3]{\frac{V_{tot} g \rho R}{\rho g \frac{4}{3}\pi L}} = \sqrt[3]{\frac{V_{tot} R}{\frac{4}{3}\pi L}}$ (come si può notare il risultato è indipendente dalla densità del liquido)

Esercizio 14 – Spinta su una calotta sferica

Un serbatoio di benzina *(ρ=0.72 g/cm^3)* è chiuso mediante una calotta emisferica di raggio *R=(1200+10·X) mm*. Il manometro metallico posto a *h=1.5 m* di profondità rispetto alla base del coperchio segna *p=(0.56-0.01·X) bar*. Calcolare la forza che agisce sull'anello di chiusura della calotta (cioè la spinta sulla calotta).



Soluzione

Tenendo conto della lettura del manometro, il valore della pressione p_1 a livello della base della calotta è:

$$p_1 = p_m - \gamma h = 56000 - 720 \cdot 9.81 \cdot 1.5 = 45405.2 \text{ Pa}$$

Applicando ora l'equazione globale dell'idrostatica al volume W di benzina contenuto nella calotta e denotando con S la spinta esercitata dalla calotta sulla benzina e con Π quella esercitata dalla benzina sottostante sul volume W:

$$\Pi = G + S$$
$$\Pi = p_1 \cdot A = 45405.2 \cdot \pi \cdot 1.2^2 = 205408.3 \text{ N}$$
$$G = \gamma \cdot V = 9.81 \cdot 720 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 1.2^3 = 25562.53 \text{ N}$$
$$S = \Pi - G = 179845.8 \text{ N}$$