

# Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 2 - 15 Ottobre 2015

## Equilibrio idrostatico

È stata ricavata a lezione l'equazione fondamentale della statica dei fluidi pesanti e incompressibili, o legge di Stevin:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \text{costante}$$

L'espressione può essere vista anche come:

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1)$$

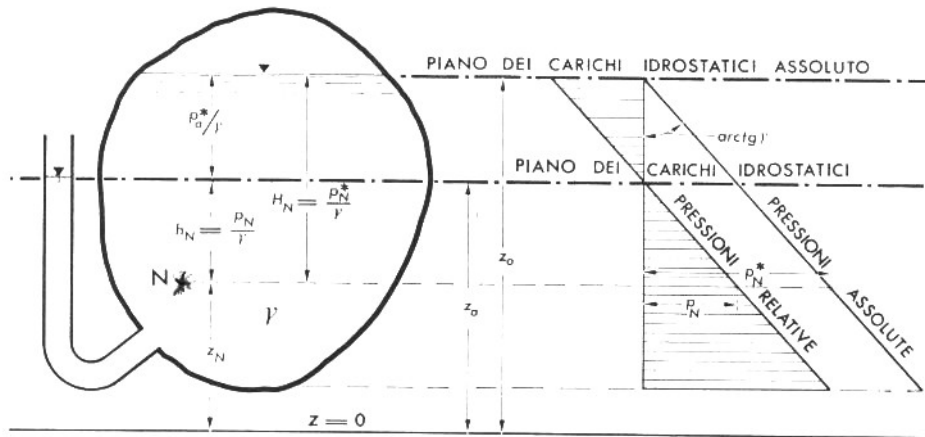
Si noti che  $\rho g(z_2 - z_1)$  è il peso della colonna di liquido di sezione unitaria,  $S=1$ , compresa fra le sezioni  $z=z_1$  e  $z=z_2$ , e ha le dimensioni di una pressione. Infatti:

$$[\rho g(z_2 - z_1)] = \text{ML}^{-3} \times \text{L T}^{-2} \times \text{L} = [\text{forza/superficie}] = [\text{pressione}]$$

In questo caso, viene quindi naturale misurare la pressione a meno del termine  $\rho g$  in funzione dell'altezza di una colonna di un dato fluido. I fluidi più usati sono l'acqua e il mercurio. Considerando che la densità del mercurio è di  $13600 \text{ kg m}^{-3}$ , la pressione di 1 atmosfera, pari a  $1.01 \cdot 10^5$  Pascal, corrisponde a quella esercitata da una colonna di mercurio alta 760 mm, che si indica con 760 mm Hg (1mm Hg si dice anche Torr, da Torricelli).

La grandezza  $p/\gamma$  è, al pari di  $z$ , una lunghezza che viene denominata *altezza piezometrica*; alla somma di  $z + p/\gamma$  si dà invece nome di *quota piezometrica*.

La legge di Stevin sta allora ad indicare che a tutti i punti di un fluido pesante incompressibile in quiete compete la stessa quota piezometrica, il cui valore è determinato quando sia assegnata la pressione in un punto di data quota  $z$ . Con ciò risulta completamente individuata la distribuzione della pressione in tutta la massa fluida. Dall'equazione innanzi scritta si riconosce immediatamente che le superfici isobariche (cioè a pressione costante), sono piani orizzontali, come del resto poteva già dedursi dal fatto che sono tali le superfici equipotenziali del campo gravitazionale. La legge di Stevin indica che la pressione aumenta linealmente al diminuire della quota geodetica, con fattore di proporzionalità pari al peso specifico del liquido. Se consideriamo un qualsiasi recipiente chiuso contenente di liquido di peso specifico  $\gamma$ , come illustrato in figura e conosciamo la pressione in un punto N di quota  $z_n$ , ammettiamo che essa sia maggiore di quella atmosferica.



Ai punti con quota generica  $z > z_n$  competono ovviamente pressioni inferiori a quelle del punto N; esisterà perciò un piano orizzontale di quota  $z_a$  su quale la pressione è esattamente pari la pressione atmosferica; tale quota si ricava applicando la legge di Stevin e vale:

$$z_a = z_n + \frac{p_n - p_a}{\gamma}$$

La posizione di questo piano al quale si dà nome di piano dei carichi idrostatici, è chiaramente individuabile immaginando, collegato al recipiente, un tubo superiormente in comunicazione con l'atmosfera; entro di esso il liquido si innalza proprio fino alla quota  $z_a$ , poiché sulla superficie libera vige la pressione atmosferica  $p_a$ . Se consideriamo punti a quota superiore a  $z_a$ , la pressione in essi è ovviamente inferiore all'atmosferica e può individuarsi un piano a quota  $z_0$  sul quale la pressione sia nulla; sempre dalla legge di Stevin si ricava:

$$z_0 = z_n + \frac{p_n}{\gamma}$$

Questo piano, denominato piano dei carichi idrostatici assoluto, dovrebbe corrispondere alla superficie libera del liquido contenuta nel recipiente, e al di sopra di esso dovrebbe avere il vuoto, poiché come già detto, i fluidi in generale non resistono a sforzi di trazione e perciò non possono essere assoggettati a pressione assolute negative.

Merita però osservare che in realtà la superficie libera anzidetta coincide non esattamente con il piano di carichi idrostatici assoluto, ma si trova a quota inferiore, poiché lo spazio di sopra di essa risulta sempre occupato dai vapori del liquido, con una certa tensione di vapore. La distanza fra i due piani di carichi idrostatici dianzi definiti vale quindi:

$$z_0 - z_a = \frac{p_a}{\gamma}$$

è cioè pari all'altezza piezometrica corrispondente alla pressione atmosferica: se ad esempio il liquido è acqua e la pressione atmosferica ha il valore normale di 102000 Pa ( $\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$ ) essa vale 10,33 metri; se invece si tratta di mercurio ( $\gamma = 133000 \text{ N/m}^3$ ) essa risulta pari a 0,76 metri.

Se il recipiente, anziché chiuso fosse aperto, sul pelo libero agirebbe la pressione atmosferica e pertanto esso viene a coincidere col piano dei carichi idrostatici. Salvo casi del tutto particolari, nella trattazione dei problemi pratici si fa riferimento alle pressioni relative anziché assolute come fatto sopra, intendendosi con pressione relativa  $p$  la differenza fra la generica pressione assoluta è quella atmosferica:  $p_{rel} = p_{ass} - p_a$ , alla quale ultima viene perciò a competere valore relativo nullo. Ne risulta ovviamente la possibilità di pressione relative negative (inferiori alla atmosferica) spesso denominate depressioni.

L'impiego delle pressioni relative nello studio di problemi pratici è collegato al fatto che di norma i recipienti che contengono i fluidi sono immersi nell'atmosfera, cosicché interessa conoscere solamente le spinte derivanti dalla differenza fra le pressioni assolute e quella atmosferica. Ad esempio, la spinta su una qualsiasi parte della parete di un recipiente contenente fluido è pari alla differenza fra la spinta assoluta del fluido e quella esterna dovuta la pressione atmosferica, cioè alla risultante degli sforzi dovuti alle sole pressioni relative. Supposto noto il piano dei carichi idrostatici (e quindi anche quello assoluto che si trova una quota più alta di  $p_a/\gamma$ ), la pressione del generico punto di quota  $z$  vale:

$$\text{pressione assoluta} \quad p_{\text{ass}} = \gamma(z_0 - z) = \gamma h_{\text{ass}}$$

$$\text{pressione relativa} \quad p_{\text{rel}} = \gamma(z_a - z) = \gamma h$$

e cioè la pressione assoluta o relativa in un punto è pari al prodotto del peso specifico del fluido per l'affondamento del punto stesso sotto il corrispondente piano dei carichi idrostatici. Ne deriva immediatamente che nota la pressione in un punto, il piano dei carichi idrostatici sovrasta il punto stesso dell'altezza piezometrica  $h = p/\gamma$ .

Individuato il piano dei carichi idrostatici, è facile tracciare diagramma delle pressioni lungo una verticale, a mezzo del quale, essendo i piani orizzontali superfici isobariche, possono essere determinate le pressioni in qualunque punto del fluido; i diagrammi delle pressioni assolute relative sono evidentemente paralleli fra loro distanza orizzontale pari a  $p_a$  e verticale pari a  $p_a/\gamma$ .

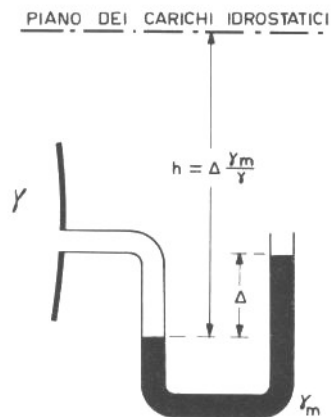
### La misura della pressione e i manometri

Come visto in precedenza, è sufficiente conoscere la pressione in un punto per individuare con facilità la distribuzione delle pressioni nell'intera massa liquida. Ci proponiamo qui di descrivere gli apparecchi atti a misurare la pressione in un punto o, meglio, ad individuare la quota piezometrica della massa fluida.

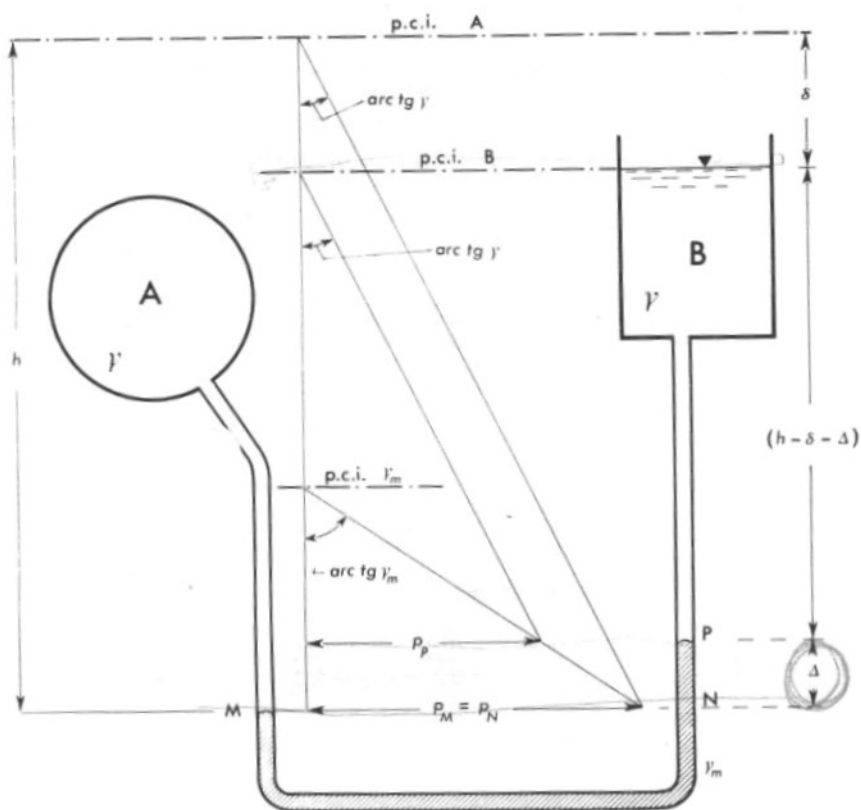
Il dispositivo più semplice e più pratico è il *piezometro*, costituito da un tubo verticale o inclinato, aperto la sommità, e collegato all'altra estremità con il recipiente contenente il liquido, il quale, come già detto, si innalza fino alla quota del piano dei carichi idrostatici.

Se le pressioni del liquido sono elevate, e quindi il piano dei carichi idrostatici è molto alto, il dispositivo risulta di difficile attuazione pratica e conviene invece adottare un manometro semplice, che tra l'altro può essere usato con qualsiasi fluido. I manometri semplici sono essenzialmente costituiti da un tubo a U di cui un'estremità è collegata con il recipiente contenente il fluido e l'altra è in comunicazione con l'atmosfera.

— manometro semplice:  $h = \frac{\Delta \gamma_m}{\gamma}$



— manometro differenziale:  $\delta = \frac{\Delta(\gamma_m - \gamma)}{\gamma}$



Nella parte superiore del tubo ad U si dispone un liquido di peso specifico  $\gamma_m$  superiore a quello  $\gamma$  del fluido contenuto nel recipiente. Spesso si usa del mercurio che ha con peso specifico pari a  $133000 \text{ N/m}^3$ . Per l'effetto dello stato di pressione del fluido nel recipiente, il liquido manometrico si porta a quote diverse nei due rami del manometro, e si può leggere facilmente di dislivello  $\Delta$  fra i due menischi M ed N'. Se scriviamo che sul piano orizzontale passante per il menisco la pressione uguale nei due rami, si ottiene:

$$p_M = p_N = \Delta \gamma_m$$

quando nel recipiente si abbia un liquido si ottiene infine:

$$h = \frac{p_M}{\gamma} = \frac{\Delta\gamma_m}{\gamma}$$

essendo  $h$  l'affondamento del menisco  $M$  sotto il piano dei carichi idrostatici del liquido nel recipiente. Va osservato che se la pressione relativa in  $M$  è negativa, il menisco  $N'$  nel ramo aperto si porta a quota più bassa di  $M$ ; il piano dei carichi idrostatici è ora al disotto del menisco  $M$  sempre della quantità  $h = \Delta\gamma_m/\gamma$ .

Se le pressioni sono molto grandi, anche manometri semplici trovano difficoltà pratiche di attuazione, la misura viene allora effettuata con i manometri metallici, fra i quali modello più comune è quello detto di Bourdon.

Sovente interessa determinare il dislivello fra i piani dei carichi idrostatici (cioè la differenza fra le quote piezometriche) di due masse liquide contenute in recipienti diversi; per tale scopo si collegano due recipienti con un tubo ad U contenente un liquido manometrico di peso specifico  $\gamma_m$  maggiore di quelli dei fluidi nei recipienti. Tale strumento è chiamato manometro differenziale. Si vedranno adesso alcune applicazioni pratiche di utilizzo di manometri.