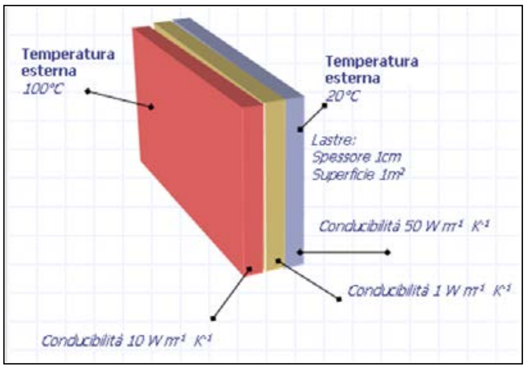
Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 1 (FIC) - 3 Dicembre 2015

Conduzione Termica

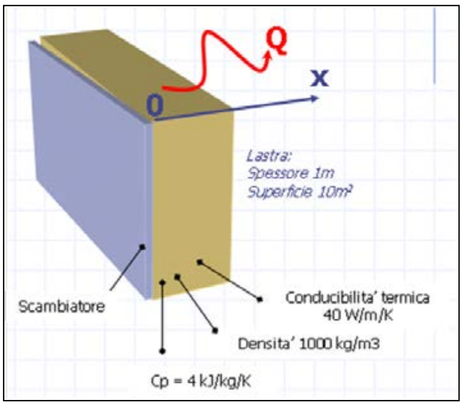
Esercizio 1 – Lastre in serie (I)
Si considerino *3* lastre piane affacciate con differenti conducibilità come riportato in figura. Gli spessori delle lastre sono tutti uguali e del valore di 1 cm mentre l'area di ciascuna lastra è pari ad *1* m^2. Le temperature delle due facce esterne sono pari a *100°C* e *20°C*. Valutare il flusso di calore in queste condizioni e quanto varia la potenza termica scambiata per conduzione raddoppiando una alla volta la conducibilità delle lastre. Discutere i risultati e tracciare per ogni caso esaminato le temperature di ciascuno strato.



Esercizio 2 – Lastre in serie (II)
Calcolare lo spessore minimo di una lastra le cui pareti siano alle temperature di *40°C* e *10°C* in grado di garantire un flusso termico inferiore a *3000* $W/m^2/K$. Si conducano i calcoli assumendo prima una conducibilità termica pari a *40 W/m/K* e successivamente di *0.01 W/m/K*.

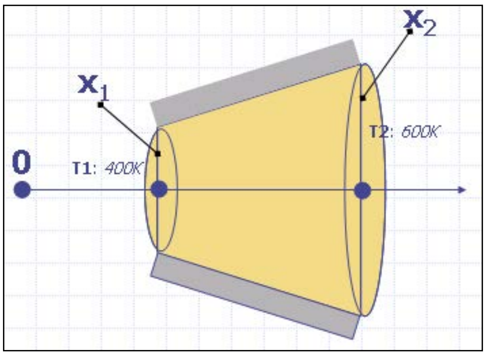
Esercizio 3 – Conduzione termica attraverso una lastra piana con profilo di temperatura assegnato
Il sistema genera una potenza termica pari a $1000 W/m^3$. Supponendo di avere assegnato il profilo di temperatura all'interno della lastra principale determinare la velocità di trasmissione del calore entrante in *x=0* ed uscente in *x=1m*. Calcolare la velocità di scambio di energia generata all'interno dello strato principale.

$$T(x) = 900 - 300x - 50x^2$$

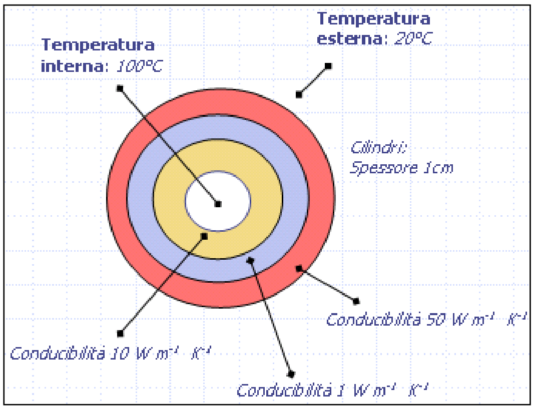


Esercizio 4 – Conduzione attraverso un tronco di cono
Calcolare il profilo di temperatura lungo un tronco di cono solido di conducibilità' termica pari a *1 W/m/K*.

$$x_1 = 50mm \quad D_1 = 12.50mm \quad T_1 = 400K$$
$$x_2 = 250mm \quad D_2 = 62.50mm \quad T_2 = 600K$$



Esercizio 5 – Tubazione con strati multipli di isolante
Una tubazione di raggio *10 cm* è adibita al trasporto di un liquido caldo alla temperatura di *100°C*. Questo sistema è isolato da tre gusci cilindrici dello spessore di *1 cm* ma con conducibilità termiche molto differenti. Calcolare la potenza termica dispersa e quanto varia al raddoppiare di una delle conducibilità dei sistemi isolanti.
Discutere i risultati precedenti e tracciare per ogni caso esaminato le temperature di ciascuno strato in funzione del raggio interno.



Esercizio 6 – Dissipazioni termiche in una tubazione
Una tubazione destinata al trasporto di vapore (diametro interno *2.067 in* – spessore *0.154 in*) è isolata all'esterno con due strati di isolanti, entrambi dello spessore di 2 in. Si chiede di stimare le perdite di calore per unità di tempo e di superficie attraverso la tubazione, immaginando che la temperatura del vapore sia pari a *250°F* e quella dell'ambiente esterno *90°F*.
Le conducibilità termiche dell'acciaio e dei due strati di isolanti siano rispettivamente: *26.1*, *0.04*, *0.03 Btu/hr/ft/°F*. I calcoli vengano condotti prima utilizzando l'isolante meno efficace a contatto con la tubazione e successivamente invertendo le posizioni. Commentare i risultati ottenuti.

Esercizio 7 – Sorgente di energia all'interno di una tubazione
Si consideri una tubazione cilindrica di alluminio di raggio esterno R_{ext} e raggio interno R_F, al cui interno esista una fonte di energia variabile con il raggio secondo la seguente espressione:

$$S(r) = S_0 \cdot \left[1 + b\left(\frac{r}{R_i}\right)^2\right]$$

dove S_0 e b sono delle costanti, r è la coordinata radiale misurata dall'asse del cilindro. Si determini il profilo termico del fluido all'interno della tubazione, immaginando che all'esterno questa sia a contatto con un fluido refrigerante alla temperatura T_c. Le conducibilità termiche del fluido nella tubazione e della parete metallica siano k_F e k_C.

Esercizio 8 – Fusione di un blocco di ghiaccio
Calcolare il tempo necessario a sciogliere un cubo di ghiaccio isolato in tutte le sue facce, da un isolante di spessore *s=1mm*. Sono assegnati il lato del cubo *L=3cm*, la conducibilità dell'isolante *k=0.01 W/mK* ed il calore latente di fusione del ghiaccio *ΔH=80cal/g*. La temperatura dell'ambiente esterno è pari a *20°C*.

Esercizio 9 – Fusione di un cilindro di ghiaccio
Calcolare il tempo necessario a sciogliere un cilindro di ghiaccio di lunghezza *L = 10 cm*, isolato in tutte le sue facce da un sistema di spessore *s=1mm*. Sono assegnati il raggio interno r = 1 cm, la conducibilità dell'isolante *k = 0.1 W/m/K* ed il calore latente di fusione del ghiaccio per unità di massa *ΔH = 80 cal/g*. Ripetere i calcoli supponendo che la stessa massa di ghiaccio abbia una forma cubica.

Esercizio 10 – Trasporto di calore attorno ad una sfera per conduzione termica
Una sfera perfettamente isolata è posta all'interno di un ambiente più freddo in quiete. Si vuole studiare la conduzione di calore nel fluido che circonda la sfera in assenza di fenomeni convettivi.

a. Si scrivano le equazioni differenziali in grado di descrivere la temperatura nel fluido che circonda la sfera in funzione di *r*, cioè la distanza radiale misurata dal centro della sfera. La conducibilità del fluido venga considerata costante e indipendente dalla posizione.
b. Si integri l'equazione differenziale utilizzando le opportune condizioni al contorno.
c. Dal profilo di temperatura ottenuto in questo modo si determini l'espressione per del flusso termico sulla superficie della sfera.

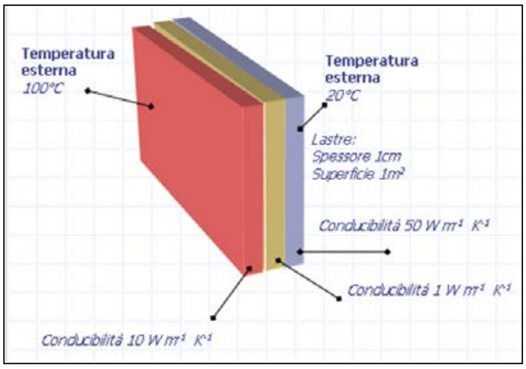
Esercitazione di Meccanica dei fluidi con Fondamenti di Ingegneria Chimica

Esercitazione 7 - 5 Dicembre 2013

Conduzione Termica

Esercizio 1 – Lastre in serie (I)

Si considerino *3* lastre piane affacciate con differenti conducibilità come riportato in figura. Gli spessori delle lastre sono tutti uguali e del valore di 1 cm mentre l'area di ciascuna lastra è pari ad *1 m²*. Le temperature delle due facce esterne sono pari a *100°C* e *20°C*. Valutare il flusso di calore in queste condizioni e quanto varia la potenza termica scambiata per conduzione raddoppiando una alla volta la conducibilità delle lastre.
Discutere i risultati precedenti e tracciare per ogni caso esaminato le temperature di ciascuno strato.



Soluzione

Si considerano 3 lastre piane affacciate con differenti conducibilità come riportato in figura. Gli spessori delle lastre sono tutti uguali e del valore di 1 cm mentre l'area di ciascuna lastra è pari ad 1 m². Le temperature delle due facce esterne sono pari a 100°C e 20°C. Valutare il flusso di calore in queste condizioni e quanto varia la potenza termica scambiata per conduzione raddoppiando una alla volta la conducibilità delle lastre.
Discutere i risultati precedenti e tracciare per ogni caso esaminato le temperature di ciascuno strato.

Flusso termico attraverso una lastra piana: $q_x = -k\dfrac{dT}{dx}$

Attraverso l'integrazione di questa espressione tramite separazione delle variabili è possibile ottenere l'espressione analitica del flusso termico in funzione delle temperature alle estremità della lastra:

$$\int_{T1}^{T2} -k \cdot dT = \int_0^L q_x \cdot dx$$

$$-k \cdot (T_2 - T_1) = q_x \cdot L$$

$$q_x = \frac{k}{L}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

$$R = \frac{L}{k}$$

Dunque i flussi termici attraverso le tre lastre hanno la seguente espressione:

$$q_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \qquad q_2 = \frac{T_2 - T_3}{R_2} \qquad q_3 = \frac{T_3 - T_4}{R_3}$$

I tre flussi individuati devono essere uguali perché si assumono condizioni stazionarie:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

Imponendo la continuità dei flussi si ottiene un sistema di due equazioni nelle incognite T2 e T3:

$$\begin{cases} \dfrac{T_1 - T_2}{R_1} = \dfrac{T_2 - T_3}{R_2} \\ \dfrac{T_1 - T_2}{R_1} = \dfrac{T_3 - T_4}{R_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} T_2 = T_2\left(T_1, T_4\right) \\ T_3 = T_3\left(T_1, T_4\right) \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni ottenute per le temperature T2 e T3 nella prima espressione del flusso termico si ottiene la soluzione del problema:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\Delta T_{tot}}{R_{tot}}$$

$$R_{tot} = \sum_i R_i = \sum_i \frac{L_i}{k_i}$$

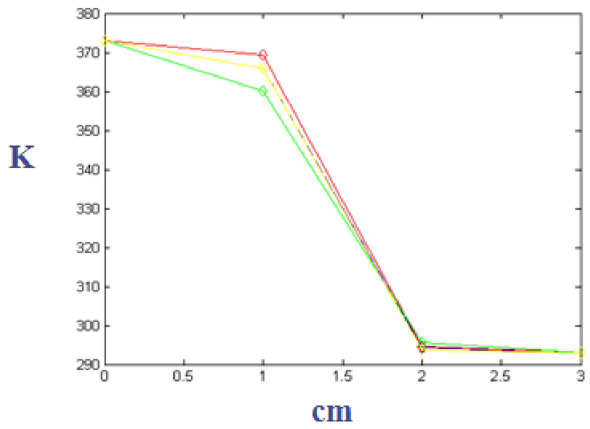
In ogni caso il flusso termico globale aumenta, indipendentemente dalla lastra per cui è stata incrementata la conducibilità termica (in altri termini la resistenza globale diminuisce)
E' evidente come la lastra **controllante** sia quella centrale, cioè caratterizzata dalla resistenza maggiore (conducibilità minore): infatti anche raddoppiando le conducibilità delle altre due il flusso termico aumenta di poco, a differenza di quanto avviene per la lastra centrale:

$$R_{tot} = 0.0112 \frac{m^2 K}{W}$$
$$Q = 7142 W$$

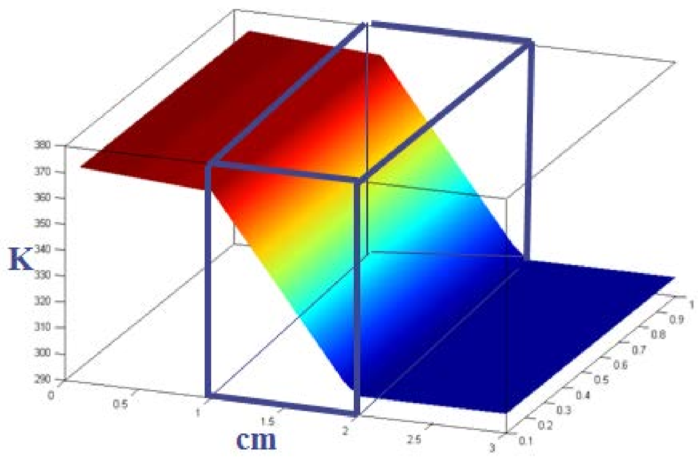
Soluzione k_1 x 2	**Soluzione k_2 x 2**	**Soluzione k_3 x 2**
$R_{tot} = 0.0107 \frac{m^2 K}{W}$ $Q = 7476 W$	$R_{tot} = 0.0062 \frac{m^2 K}{W}$ $Q = 12903 W$	$R_{tot} = 0.0111 \frac{m^2 K}{W}$ $Q = 7207 W$

I profili di temperatura attraverso una lastra piana sono LINEARI (a patto che la conducibilità termica sia ovviamente costante).

$$T(x) = T_{sn} - \frac{q}{k} x$$



La lastra con conducibilità minore è soggetta ad un maggiore stress termico. Lo ***stress termico*** è definito come il gradiente di temperatura tra le due facce della lastra.



Esercizio 2 – Lastre in serie (II)
Calcolare lo spessore minimo di una lastra le cui pareti siano alle temperature di *40°C* e *10°C* in grado di garantire un flusso termico inferiore a *3000 W/m²/K*. Si conducano i calcoli assumendo prima una conducibilità termica pari a *40 W/m/K* e successivamente di *0.01 W/m/K*.

Soluzione

$$q_x = -k\frac{dT}{dx}$$

$$-k \cdot (T_2 - T_1) = q_x \cdot L$$

$$L_{\min} = \frac{k}{q_x}\Delta T$$

Alta conducibilita’ termica

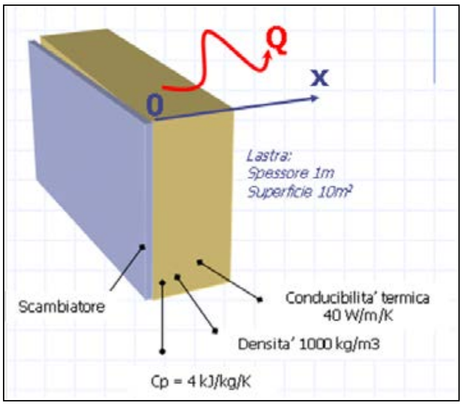
$$L_{\min} = \frac{k}{q_x}\Delta T = 0.40m$$

Bassa conducibilita’ termica

$$L_{\min} = \frac{k}{q_x}\Delta T = 0.1mm$$

Esercizio 3 – Conduzione termica attraverso una lastra piana con profilo di temperatura assegnato

Il sistema genera una potenza termica pari a *1000W/m*^{3}. Supponendo di avere assegnato il profilo di temperatura all'interno della lastra principale determinare la velocità di trasmissione del calore entrante in *x=0* ed uscente in *x=1m*. Calcolare la velocità di scambio di energia generata all'interno dello strato principale.



Soluzione

Il punto di partenza è sempre rappresentato dall'espressione della **potenza** attraverso una lastra piana:

$$Q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

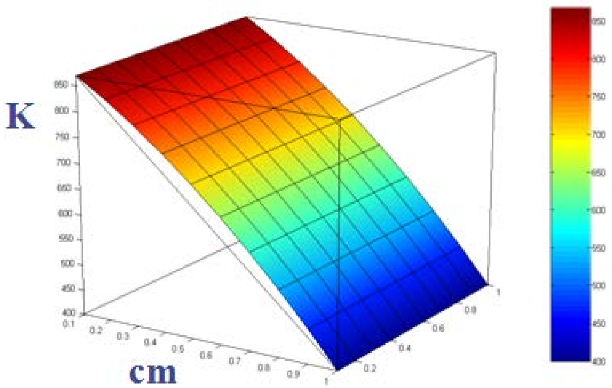
E' sufficiente applicare questa espressione alle due estremità della lastra:

$$Q_{in} = Q(x=0) = -kA\frac{dT}{dx}_{x=0} = -kA(b+2cx) = 120kW$$

$$Q_{out} = Q(x=L) = -kA\frac{dT}{dx}_{x=L} = -kA(b+2cx) = 160kW$$

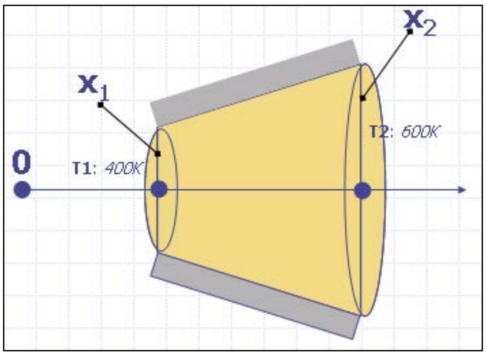
E' evidente che c'è un "accumulo" di energia all'interno della lastra. Per quantificarlo è sufficiente fare un bilancio globale di energia:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = \dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = -30kW$$



Esercizio 4 – Conduzione attraverso un tronco di cono

Calcolare il profilo di temperatura lungo un tronco di cono solido di conducubilita' termica pari a *1 W/m/K* e definire il flusso di energia attraverso una generica faccia verticale.



$$x_1 = 50mm \qquad \mathrm{D}_1 = 12.50mm$$
$$x_2 = 250mm \qquad \mathrm{D}_2 = 62.50mm$$

$$T_1 = 400K$$
$$T_2 = 600K$$

Soluzione

Per ottenere il profilo di temperature si segue lo stesso metodo sfruttato nel primo esercizio; le cose stavolta sono però più complicate perché la sezione A non è più costante ma varia lungo la coordinata x. Si ricava prima di tutto la legge che esprime la dipendenza del diametro delle sezioni del cono con la coordinata x:

$$D(x) = c \cdot x$$
$$c = \frac{D_2 - D_1}{x_2 - x_1} = 0.25$$

Quindi si ricava l'espressione dell'area delle sezioni del tronco di cono:

$$A(x) = \frac{\pi D^2}{4} = 0.25^2 \cdot \frac{\pi x^2}{4}$$

Si scrive l'espressione della potenza termica:

$$Q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$-kdT = \frac{Q}{A}dx$$

L'integrazione può essere comunque effettuata in maniera analitica attraverso la separazione delle variabili:

$$\frac{4Q_x dx}{0.25^2 \cdot \pi x^2} = -kdT$$

$$\frac{4Q_x}{0.25^2 \cdot \pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = -k\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$T(x) = T_1 - \frac{4Q_x}{0.25^2 \cdot \pi k} \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right)$$

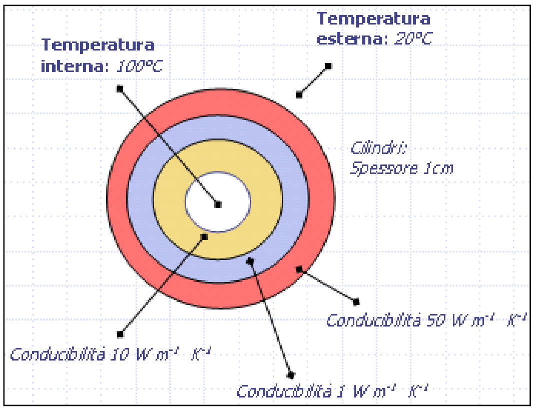
Infine si ottiene il flusso termico:

$$Q_x = -kA\frac{dT}{dx} = \frac{0.25^2 \cdot \pi k \cdot (T_1 - T_2)}{4 \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)}$$

Profilo di temperatura

$$T(x) = T_1 + (T_1 - T_2) \cdot \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right)}{\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)}$$

Esercizio 5 – Tubazione con strati multipli di isolante
Una tubazione di raggio *10 cm* è adibita al trasporto di un liquido caldo alla temperatura di *100°C*. Questo sistema è isolato da tre gusci cilindrici dello spessore di *1 cm* ma con conducibilità termiche molto differenti. Calcolare la potenza termica dispersa e quanto varia al raddoppiare di una delle conducibilità dei sistemi isolanti.
Discutere i risultati precedenti e tracciare per ogni caso esaminato le temperature di ciascuno strato in funzione del raggio interno.



Soluzione
Il problema è analogo a quello della conduzione attraverso una serie di lastre. E' sufficiente calcolare la resistenza di ciascun guscio cilindrico e quinddi calcolare la resistenza totale offerta dai tre gusci. L'espressione della singola resistenza è chiaramente diversa da quella di una lastra piana, ma comunque dipende dallo spessore (o meglio, dal rapporto tra il raggio interno ed esterno) e dalla conducibilità termica:

$$R_i = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L \cdot k}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L \cdot k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi L \cdot k_2} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi L \cdot k_3}$$

Nota la resistenza totale e la differenza di temperatura complessiva a cavallo dei tre gusci cilindrici, il flusso termico può essere ricavato direttamente

$$q(r) = \frac{\Delta T}{A_i \cdot R_{tot}} = \frac{\Delta T}{2\pi r L \cdot R_{tot}}$$

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{tot}}$$

$$R_{tot} = 0.0156 \frac{mK}{W}$$

$$Q = 5119 \frac{W}{m}$$

Soluzione k_1 x 2	Soluzione k_2 x 2	Soluzione k_3 x 2
$R_{tot} = 0.0149 \frac{mK}{W}$ $Q = 5380 \frac{W}{m}$	$R_{tot} = 0.0087 \frac{mK}{W}$ $Q = 9195 \frac{W}{m}$	$R_{tot} = 0.0155 \frac{mK}{W}$ $Q = 5161 \frac{W}{m}$

Esercizio 6 – Dissipazioni termiche in una tubazione

Una tubazione destinata al trasporto di vapore (diametro interno *2.067 in* – spessore *0.154 in*) è isolata all'esterno con due strati di isolanti, entrambi dello spessore di 2 in. Si chiede di stimare le perdite di calore per unità di tempo e di superficie attraverso la tubazione, immaginando che la temperatura del vapore sia pari a *250°F* e quella dell'ambiente esterno *90°F*.

Le conducibilità termiche dell'acciaio e dei due strati di isolanti siano rispettivamente: *26.1*, *0.04*, *0.03 Btu/hr/ft/°F*. I calcoli vengano condotti prima utilizzando l'isolante meno efficace a contatto con la tubazione e successivamente invertendo le posizioni. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione

A differenza di quanto avviene per una serie di lastre piane, la resistenza totale (e quindi la potenza termica) in una serie di gusci cilindrici dipende anche dall'ordine secondo cui questi sono disposti. Infatti la resistenza di un singolo guscio dipende dal rapporto tra raggio esterno e raggio interno:

$$R_{tot} = \frac{\ln\left(\frac{r_{metallo}^{\text{int}} + s_{metallo}}{r_{metallo}^{\text{int}}}\right)}{2\pi L \cdot k_{met}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{isolante1}^{\text{int}} + s_{isolante1}}{r_{isolante1}^{\text{int}}}\right)}{2\pi L \cdot k_{isolante1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{isolante2}^{\text{int}} + s_{isolante2}}{r_{isolante2}^{\text{int}}}\right)}{2\pi L \cdot k_{isolante2}}$$

La potenza termica dipende dalla differenza di temperatura a cavallo dei gusci e dalla resistenza totale; il flusso termico dipende dalla superficie rispetto a cui viene misurato e quindi dalla coordinata radiale:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{tot}}$$

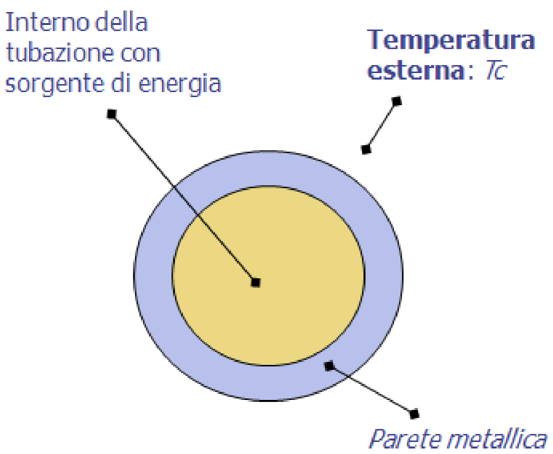
$$q(r) = \frac{Q}{2\pi r L} = \frac{\Delta T}{2\pi r L \cdot R_{tot}}$$

Esercizio 7 – Sorgente di energia all'interno di una tubazione

Si consideri una tubazione cilindrica di alluminio di raggio esterno R_{ext} e raggio interno R_F, al cui interno esista una fonte di energia variabile con il raggio secondo la seguente espressione:

$$S(r) = S_0 \cdot \left[1 + b\left(\frac{r}{R_i}\right)^2\right]$$

dove S_0 e b sono delle costanti, r è la coordinata radiale misurata dall'asse del cilindro. Si determini il profilo termico del fluido all'interno della tubazione, immaginando che all'esterno questa sia a contatto con un fluido refrigerante alla temperatura T_c. Le conducibilità termiche del fluido all'interno della tubazione e della parete metallica siano rispettivamente k_F e k_C.



Soluzione

Prima di tutto è necessario riscrivere l'equazione indefinita di bilancio termico all'interno della tubazione: si dovrà tener conto in questo caso di un termine di generazione non nullo.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot k_F \frac{dT_F}{dr}\right) + S(r) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot k \frac{dT_F}{dr}\right) + S_0 \cdot \left[1 + b\left(\frac{r}{R_F}\right)^2\right] = 0$$

L'integrazione di questa equazione differenziale del secondo ordine richiede due condizioni al contorno: la prima, grazie alla geometria del sistema, può essere data lungo l'asse del cilindro; la seconda deve essere invece data in corrispondenza della parete interna. Per il momento eseguiamo la doppia integrazione rispetto alla variabile r introducendo due costanti di integrazione C1 e C2 che verranno determinate solo successivamente:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot k_F \frac{dT_F}{dr}\right) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r \cdot q_r) = -S_0 \cdot \left[1 + b\left(\frac{r}{R_F}\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dr}(r \cdot q_r) = -S_0 \cdot \left[1 + b\left(\frac{r}{R_F}\right)^2\right] \cdot r$$

$$q_r = \frac{S_0}{r}\left[\int r \cdot dr + \frac{b}{R_F^2}\int r^3 \cdot dr\right]$$

$$q_r = S_0\left[\frac{r}{2} + \frac{b}{4R_F^2} r^3\right] + \frac{C_1}{r}$$

La costante C1 può essere determinata immediatamente: essa deve essere necessariamente pari a zero altrimenti in corrispondenza dell'asse si avrebbe un flusso termico infinito. Scrivendo il flusso termico in termini di temperatura grazie alla legge di Fourier si ottiene una nuova equazione differenziale da integrare:

$$q_r = \frac{S_0}{2}\left[r + \frac{b}{2R_F^2} r^3\right]$$

$$-k_F \frac{dT}{dr} = S_0\left[\frac{r}{2} + \frac{b}{4R_F^2} r^3\right]$$

$$dT = -\frac{S_0}{k_F}\left[\frac{r}{2} + \frac{b}{4R_F^2} r^3\right] dr$$

$$T = -\frac{S_0 r^2}{4k_F}\left[1 + \frac{b}{4R_F^2} r^2\right] + C_2$$

La determinazione della nuova costante C2 è un po' più complessa; prima è necessario determinare il profilo termico nella parete metallica della tubazione per poter imporre una condizione di uguaglianza delle temperature.

Il profilo termico nella parete metallica è noto (si tratta di un guscio cilindrico); le due costanti possono essere determinate sfruttando la continuità dei flussi in corrispondenza della parete interna e la conoscenza della temperatura all'esterna:

$$T_C(r) = C_3 \ln(r) + C_4$$

$$-k_F\left(\frac{dT_F}{dr}\right)\bigg|_{R_F} = -k_c\left(\frac{dT_C}{dr}\right)\bigg|_{R_F}$$

$$T_F(R_F) = T_C(R_F)$$

La prima condizione al contorno consente di determinare immediatamente la costante C3:

$$-k_C\left(\frac{dT_C}{dr}\right)\bigg|_{R_F} = q_F(R_F) = \frac{S_0 r}{2}\left(1 + \frac{br^2}{2R_F}\right)$$

$$-k_C\left(\frac{dT_C}{dr}\right)\bigg|_{R_F} = -k_C \frac{C_3}{R_F}$$

$$C_3 = -\frac{S_0 R_F^2}{2k_C}\left(1+\frac{b}{2}\right)$$

Attraverso la seconda si ottiene il valore della costante C4:

$$C_4 = T_{ext} - C_3 \ln R_{ext} = T_{ext} + \frac{S_0 R_F^2}{2k_C}\left(1+\frac{b}{2}\right)\ln R_{ext}$$

Torniamo quindi alla equazione che descrive il profilo termico all'interno della tubazione; imponendo che la temperatura in corrispondenza della parete interna valutata dal lato fluido e da quello della parete sia la stessa, si ottiene la costante C2:

$$C_2 = T_{ext} + \frac{S_0 R_F^2}{4k_F}\left(1+\frac{b}{4}\right) + \frac{S_0 R_F^2}{2k_C}\left(1+\frac{b}{2}\right)\ln\frac{R_{ext}}{R_F}$$

Il profilo termico del fluido nella tubazione è quindi determinato:

$$T_{ax}(r) = \frac{S_0 r^2}{4k}\left[1+\frac{b}{4R_i^2}r^2\right] + T_{ext} + \frac{S_0 R_F^2}{4k_F}\left(1+\frac{b}{4}\right) + \frac{S_0 R_F^2}{2k_C}\left(1+\frac{b}{2}\right)\ln\frac{R_{ext}}{R_F}$$

$$T_{ax}(r=0) = T_{ext} + \frac{S_0 R_F^2}{4k_F}\left(1+\frac{b}{4}\right) + \frac{S_0 R_F^2}{2k_C}\left(1+\frac{b}{2}\right)\ln\frac{R_{ext}}{R_F}$$

Esercizio 8 – Fusione di un blocco di ghiaccio

Calcolare il tempo necessario a sciogliere un cubo di ghiaccio isolato in tutte le sue facce, da un sistema di spessore *s=1mm*. Sono assegnati il lato del cubo *L=3cm*, la conducibilità dell'isolante *k=0.01 W/mK* ed il calore latente di fusione del ghiaccio *ΔH=80cal/g*. La temperatura dell'ambiente esterno è pari a *20°C*.

Soluzione

Il tempo necessario per sciogliere il ghiaccio può essere ottenuto andando ad eguagliare l'energia necessaria per sciogliere tutto il ghiaccio con quella entrante nel "sistema" dall'ambiente esterno, più caldo.

Energia necessaria per sciogliere tutto il ghiaccio:

$$E = m_{ghiaccio} \cdot \Delta H_{latente} = \rho_{ghiaccio} \cdot L^3 \cdot \Delta H_{latente}$$

Energia entrante nel sistema:

$$E = q \cdot S_{tot} \cdot \Delta t$$

Flusso termico attraverso le facce del cubo:

$$q = k \frac{T_{ext} - T_{ghiaccio}}{s}$$

Superficie totale di scambio:

$$S_{tot} = 6 \cdot L^2$$

Tempo:

$$\Delta t = \frac{E}{q \cdot S_{tot}} = \frac{\rho_{ghiaccio} \cdot L^3 \cdot \Delta H_{latente}}{\frac{k}{s}\left(T_{ext} - T_{ghiaccio}\right) \cdot 6L^2}$$

Energia necessaria per sciogliere tutto il ghiaccio: $E = 9041\ J$

Flusso termico attraverso le facce del cubo: $q = 200\ \frac{W}{m^2}$

Tempo: $\Delta t \approx 139 \min$

Esercizio 9 – Fusione di un cilindro di ghiaccio
Calcolare il tempo necessario a sciogliere un cilindro di ghiaccio di lunghezza *L = 10 cm*, isolato in tutte le sue facce da un sistema di spessore *s=1mm*. Sono assegnati il raggio interno r = 1 cm, la conducibilità dell'isolante *k = 0.1 W/m/K* ed il calore latente di fusione del ghiaccio per unità di massa *ΔH = 80 cal/g*.
Ripetere i calcoli supponendo che la stessa massa di ghiaccio abbia una forma cubica.

Soluzione
Energia necessaria per fondere tutta la massa di ghiaccio

$$E = m_{ghiaccio} \cdot H_{fusione}$$

Energia fornita dall'ambiente esterno nel tempo Δt

$$E = q_{cond} \cdot S_{tot} \cdot \Delta t$$

Potenza termica entrante dall'esterno

$$q_{cond} \cdot S_{tot} = Q_{cond} = \frac{T_{ext} - T_{ghiaccio}}{R} = \frac{T_{ext} - T_{ghiaccio}}{\dfrac{\ln(r_e / r_i)}{2\pi L \cdot k}}$$

$$\frac{T_{ext} - T_{ghiaccio}}{\dfrac{\ln(r_e / r_i)}{2\pi L \cdot k}} \Delta t = m_{ghiaccio} \cdot H_{fusione}$$

$$\Delta t = \frac{m_{ghiaccio} \cdot H_{fusione} \dfrac{\ln(r_e / r_i)}{2\pi L \cdot k}}{T_{ext} - T_{ghiaccio}}$$

Esercizio 10 – Trasporto di calore attorno ad una sfera per conduzione termica

Una sfera perfettamente isolata è posta all'interno di un ambiente più freddo in quiete. Si vuole studiare la conduzione di calore nel fluido che circonda la sfera in assenza di fenomeni convettivi.

d. Si scrivano le equazioni differenziali in grado di descrivere la temperatura nel fluido che circonda la sfera in funzione di *r*, cioè la distanza radiale misurata dal centro della sfera. La conducibilità del fluido venga considerata costante e indipendente dalla posizione.
e. Si integri l'equazione differenziale utilizzando le opportune condizioni al contorno.
f. Dal profilo di temperatura ottenuto in questo modo si determini l'espressione per del flusso termico sulla superficie della sfera

Soluzione

Il problema è estremamente semplice da descrivere fisicamente e da tradurre in termini matematici. Grazie alla geometria del sistema è possibile adottare un sistema di coordinate sferiche monodimensionale (per via delle simmetrie presenti); l'equazione di conservazione dell'energia in condizioni stazionarie e in assenza si sorgenti o pozzi, è la seguente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot k\frac{dT}{dr}\right)=0$$

A differenza di quanto fatto finora, stavolta è necessario integrare questa equazione differenziale all'ESTERNO della sfera. Sono necessarie due condizioni al contorno: la prima, in corrispondenza della superficie della sfera, consiste semplicemente nell'assegnare la temperatura pari a TS; la seconda a distanza infinita:

$$\begin{cases} r = R_S & T = T_S \\ r \to \infty & T = T_{air} \end{cases}$$

L'equazione differenziale viene integrata due volte portando al seguente profilo termico:

$$r^2 \cdot k\frac{dT}{dr} = A$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A}{k \cdot r^2} = \frac{B}{r^2}$$

$$dT = \frac{B}{r^2}dr$$

$$T = -\frac{B}{r} + C$$

Le due costanti di integrazione vengono determinate semplicemente imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T_s = -\dfrac{B}{R_S} + C \\ T_{air} = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -R_S\left(T_s - T_{air}\right) \\ T_{air} = C \end{cases}$$

$$\boxed{T = T_{air} + \left(T_s - T_{air}\right)\frac{R_S}{r}}$$

Il flusso termico in corrispondenza della superficie della sfera si ricava a partere dalla legge di Fourier:

$$q = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_{R_s} = k\left(T_{air} - T_s\right)\left.\frac{R_S}{r^2}\right|_{R_S} = \frac{k\left(T_{air} - T_s\right)}{R_S}$$